22.1я723
С81

Учебное пособие для педагогических училищ

30-36

Л. П. Стойлова
А. М. Пышкало

ОСНОВЫ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

ЦЕЛЫЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Законы сложения и умножения

$a+b=b+a$ для любых чисел a и b

$(a+b)+c=a+(b+c)$ для любых чисел a, b и c

$a\cdot b=b\cdot a$ для любых чисел a и b

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ для любых чисел a, b и c

$(a+b)\cdot c=ac+bc$ для любых чисел a, b и c

Правила вычитания и деления

Правило вычитания числа из суммы

$$(a+b)-c=\begin{cases}(a-c)+b, & \text{если } a\geqslant c;\\ a+(b-c), & \text{если } b\geqslant c\end{cases}$$

Правило вычитания суммы из числа

$a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b$, если $a\geqslant b+c$

Правило деления произведения на число

$$(a\cdot b):c=\begin{cases}(a:c)\cdot b, & \text{если } a\vdots c;\\ a\cdot(b:c), & \text{если } b\vdots c\end{cases}$$

Правило деления числа на произведение

$a:(b\cdot c)=(a:b):c=(a:c):b$, если $a\vdots bc$, $a\vdots b$ и $a\vdots c$

Правило деления суммы на число

$(a+b):c=a:c+b:c$, если $a\vdots b$ и $b\vdots c$

Л. П. Стойлова
А. М. Пышкало

ОСНОВЫ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Допущено Министерством просвещения СССР
в качестве учебного пособия для учащихся
педагогических училищ по специальности № 2001
«Преподавание в начальных классах
общеобразовательной школы»

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1988

ББК 22.1
С81

Рецензенты: предметная (цикловая) комиссия Ногинского педагогического училища имени 50-летия ВЛКСМ; доктор педагогических наук, доцент А. Г. Мордкович (МГЗПИ)

Стойлова Л. П., Пышкало А. М.

С81 Основы начального курса математики: Учеб. пособие для учащихся пед. уч-щ по спец. № 2001 «Преподавание в нач. классах общеобразоват. шк.» — М.: Просвещение, 1988.— 320 с.: ил.

ISBN 5-09-000482-X

Пособие написано в соответствии с программой для педагогических училищ. Наряду с теоретическим материалом в нем содержится большое количество упражнений, решение которых поможет будущим учителям овладевать профессиональными умениями.

С $\frac{4308000400-432}{103(03)-88}$ Сводный план лит-ры '77—'88 ББК 22.1

ISBN 5-09-000482-X

© Издательство «Просвещение», 1988

ПРЕДИСЛОВИЕ

Успешное обучение математике младших школьников требует от учителя не только методического мастерства, но и глубокого понимания сути математических понятий и фактов. Дело не только в том, что в начальных классах закладываются основы таких важнейших понятий, как «число» и «величина», происходит ознакомление с элементами буквенной символики и геометрии, развиваются логические умения, но и в том, что многие математические понятия младшие школьники используют без строгих определений, а во многих случаях и неявно. Все это предъявляет особые требования к математической подготовке учителя начальной школы. Он должен владеть понятиями натурального числа и величины, знать различные определения арифметических действий над числами, их свойства, уметь выполнять и объяснять устные и письменные вычисления, обосновывать выбор действия и устанавливать вид зависимости между величинами при решении текстовых задач. Учителю необходимо и умение использовать уроки математики для воспитания учащихся, в частности для формирования у них основ научного мировоззрения.

Данное учебное пособие написано в соответствии с программой и нацелено на решение задачи обеспечения будущего учителя начальных классов математической подготовкой, необходимой ему для грамотного, творческого обучения и воспитания младших школьников, для дальнейшей работы по углублению и расширению математических знаний.

Структура пособия такова: весь материал разбит на пять глав, главы — на параграфы, параграфы — на пункты. Каждый пункт заканчивается упражнениями, предназначенными как для более глубокого усвоения теории, так и для формирования у будущего учителя ряда профессиональных умений. Например, умений решать текстовые задачи и анализировать математическое содержание заданий, выполняемых учащимися.

Профессиональная направленность пособия достигается посредством определенного отбора теоретического материала и методических подходов к его изложению, путем включения заданий, выполняемых младшими школьниками (они в основном взяты из действующих учебников по математике для начальных классов).

При написании § 4 «Текстовые задачи и их решение» авторы использовали материалы, подготовленные С. Е. Царевой и Р. Н. Шиковой.

Глава I

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИКИ

§ 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

1. Введение

Математика, как и другие науки, изучает окружающий нас мир, природные и общественные явления, но изучает лишь их особые стороны. Например, в геометрии изучают форму и размеры предметов, не принимая во внимание другие их свойства: цвет, массу, твердость и т. д. От всего этого отвлекаются, абстрагируются. Поэтому в геометрии вместо слова «предмет» говорят: «Геометрическая фигура». Отрезок, луч, прямая, угол, окружность, квадрат — геометрические фигуры.

Результатом абстрагирования являются и такие важнейшие математические понятия, как «число» и «величина».

Вообще любые математические объекты — это результат выделения из предметов и явлений окружающего мира количественных и пространственных свойств и отношений и абстрагирования их от всех других свойств. Следовательно, математические объекты реально не существуют, нет в окружающем нас мире геометрических фигур, чисел и т. д. Все они созданы человеческим умом в процессе исторического развития общества и существуют лишь в мышлении человека и в тех знаках и символах, которые образуют математический язык.

Более того, при образовании математических объектов происходит не только абстрагирование от многих свойств соответствующих предметов, но и приписывание им таких свойств, которыми никакие реальные предметы не обладают. Например, в таком математическом объекте, как прямая, отражено не только свойство протяженности реальных предметов, но и, как известно, свойство неограниченной протяженности в обоих направлениях, хотя никакой из реально существующих предметов таким свойством не обладает.

Возникает вопрос: как же сложилось такое представление о математических объектах и зачем оно нужно?

Вот как отвечают на этот вопрос А. Д. Александров, А. Л. Венгер и В. И. Рыжик[1]:

«Можно указать две основные причины того, что сложились и утвердились идеальные геометрические представления.

[1] Александров А. Д. и др. Геометрия для 9—10 классов: Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики.— М., 1984.— С. 6—7.

Первую причину легко понять из примера проведения отрезка. Землемеры в Древнем Египте втыкали в землю два колышка и протягивали между ними веревку. Но колышки можно взять потоньше, а вместо веревки — тонкую нить. И не видно, почему нельзя уточнять это дальше.

Таким образом, первая причина состоит в том, что практика и наглядное представление всегда показывали и показывают возможность сделать формы тел и геометрическое построение более точными. Так, представляя себе продолжение отрезка прямой, мы не видели принципиальных ему границ, и возникает представление о неограниченно продолженной прямой.

Неточности связаны с особенностями материальных тел, с теми или иными условиями. Но все это является посторонним и случайным по отношению к существу самих геометрических построений. Поэтому эти построения выступают в принципе как неограниченно уточняемые, так же как форма и размеры тела представляются в принципе неограниченно уточняемыми.

Отсюда возникает представление об идеальных геометрических фигурах. Рассматривается, например, треугольник не деревянный, не железный, никакой другой, а треугольник вообще и, значит, идеальный треугольник.

Вторая причина того, что это представление сложилось и утвердилось, тесно связанная с первой, заключается в том, что точное рассуждение требует идеально точно определенного предмета. Для того, чтобы делать выводы, чтобы решать практические задачи, нужны четкие правила. А точные правила требуют точных понятий, тем более точных понятий требует точная теория. В этом вторая причина утверждения идеальных понятий геометрии. Продолжающееся и теперь уточнение геометрических понятий неразрывно связано с уточнением математических рассуждений — определений и доказательств. А точная теория нужна в конечном счете для применения в науке и технике, так же как в точной работе нужен хороший точный инструмент».

К сказанному можно добавить, что, изучая пространственные формы и количественные отношения материального мира, математика не только пользуется различными приемами абстрагирования, но и само абстрагирование выступает как многоступенчатый процесс. В математике рассматривают не только понятия, появившиеся при изучении реальных предметов, но и свойства понятий, возникших на основе первых. Например, понятие переменной является абстракцией конкретных переменных величин, т. е. абстракцией от абстракции.

В своем развитии математика прошла несколько этапов, создавая на каждом из них определенные способы познания и осмысления разнообразных форм и количественных отношений материального мира. В частности, был создан широко распространенный в настоящее время такой метод изучения действительности, как метод построения математических моделей. Он заключается в при-

ближенном описании с помощью математической символики какой-либо совокупности явлений внешнего мира. Изучая модели, математика изучает тем самым и саму реальную действительность. Так, знание свойств функции $y=kx$ позволяет описывать особенности зависимостей между различными величинами: временем и расстоянием прямолинейного равномерного движения, количеством и стоимостью товара и др.

Вообще абстрактность математики позволяет применять ее в самых разных областях знания, поскольку она представляет собой могущественный инструмент познания природы и создания техники.

Упражнения

1. Решите следующие задачи и объясните, какие геометрические фигуры выступают в них в качестве идеальных моделей реальных предметов:

1) Длина школьного коридора 30 м, а ширина 5 м. Какова площадь школьного коридора? 2) Землетрясение распространяется на земной поверхности со скоростью 0,8 км/с. Какую площадь может охватить землетрясение через 10 с? 3) Прямоугольный участок земли размером 130×60 м окопали рвом шириной 1 м, причем ров выкопали на участке. Какова новая площадь участка? 4) Плавательный бассейн прямоугольной формы имеет длину 50 м, ширину 24 м и глубину 3 м. Сколько кубических метров воды вмещает бассейн, если уровень воды в бассейне на 50 см ниже его борта?

2. Какая функция является моделью зависимостей, рассматриваемых в задачах:

1) Путь от A до B турист прошел за 3 ч. За сколько времени турист прошел бы тот же путь, если бы шел в 1,5 раза быстрее?

2) Совхозное поле три трактора могут вспахать за 60 ч. За какое время вспашут это поле 9 таких тракторов?

2. Объем и содержание понятия

Всякий математический объект обладает определенными свойствами. Например, квадрат имеет четыре стороны, четыре прямых угла, равные диагонали.

Можно указать и другие свойства квадрата.

Среди свойств объекта различают свойства **существенные** и **несущественные** для его выделения из других объектов. Свойство считают существенным для объекта, если оно присуще этому объекту и без него он не может существовать. Несущественные свойства — это такие свойства, отсутствие которых не влияет на существование объекта. Так, названные выше свойства квадрата являются существенными, а свойство «сторона AD квадрата $ABCD$ горизонтальна» несущественное (если квадрат $ABCD$ повернуть (рис. 1), то сторона AD окажется расположенной по-

другому). Поэтому, чтобы понимать, что представляет собой данный объект достаточно знать его существенные свойства. В этом случае говорят, что имеется **понятие об этом объекте.**

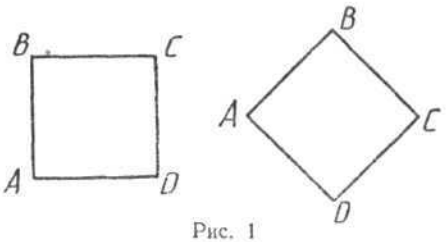


Рис. 1

Совокупность всех взаимосвязанных существенных свойств объекта называют **содержанием понятия** об этом объекте.

Когда говорят о математическом объекте, то обычно имеют в виду всю совокупность объектов, обозначаемых одним термином (словом, названием). Так, когда говорят о квадрате, то имеют в виду все геометрические фигуры, являющиеся квадратами. Совокупность всех квадратов составляет объем понятия квадрата.

Вообще **объем понятия** — это совокупность всех объектов, обозначаемых одним и тем же термином.

Таким образом, всякое понятие характеризуется термином, объемом и содержанием.

Между объемом понятия и его содержанием существует связь: чем «больше» объем понятия, тем «меньше» его содержание, и наоборот. Так, например, объем понятия «прямоугольный треугольник» «меньше» объема понятия «треугольник», поскольку в объем первого понятия входят не все треугольники, а только прямоугольные. Но содержание первого понятия «больше» содержания второго: прямоугольный треугольник обладает не только всеми свойствами треугольника, но и другими, присущими только прямоугольным треугольникам.

Начальный курс математики насыщен различными математическими понятиями. Так, уже в I классе учащиеся знакомятся с понятиями «цифра», «число», «слагаемое», «сумма», «отрезок», «длина отрезка» и многими другими. Во II классе к ним добавляются понятия, связанные с умножением и делением, в III — понятия дроби, площади фигуры и другие.

Упражнения

1. Начертите три объекта, принадлежащие объему понятия: 1) геометрическая фигура; 2) прямоугольник; 3) квадрат; 4) ромб.

2. Назовите пять существенных свойств понятия: 1) треугольник; 2) прямоугольник; 3) трапеция.

3. Какие из приведенных ниже свойств трапеции являются существенными, а какие несущественными: 1) две стороны трапеции параллельны; 2) основания трапеции горизонтальные; 3) оба угла при большем основании острые; 4) оба угла при меньшем основании тупые; 5) сумма внутренних углов трапеции равна 360°?

4. Верно ли, что объем понятия «прямоугольник» «больше», чем объем понятия «квадрат»? Какая взаимосвязь существует между содержанием этих понятий?

5. Каков объем понятия: 1) цифра; 2) однозначное число?

6. Назовите несколько свойств, общих для прямоугольника и квадрата, и выясните, какое утверждение верное: 1) всякое свойство прямоугольника присуще квадрату; 2) всякое свойство квадрата присуще прямоугольнику.

7. Среди следующих свойств выделите те, которыми обладает квадрат: 1) диагонали делят друг друга в точке пересечения пополам; 2) диагонали делят углы пополам.

8. Какими свойствами из названных в упражнении 7 обладает: 1) прямоугольник; 2) параллелограмм; 3) ромб?

3. Определение понятий

В содержание понятия о каком-либо математическом объекте входит много различных существенных свойств этого объекта. Однако чтобы установить, содержится ли объект в объеме данного понятия (т. е. распознать его), необходимо проверить наличие у него лишь некоторых существенных свойств. Указание этих существенных свойств объекта, которые достаточны для распознания объекта, называется **определением понятия** об этом объекте.

Вообще **определение — это логическая операция, раскрывающая содержание понятия.**

Способы определения понятия различны. Прежде всего различают **явные** и **неявные** определения.

Явные определения имеют форму равенства, совпадения двух понятий. Например, прямоугольный треугольник — это треугольник с прямым углом. Если обозначить через a понятие «прямоугольный треугольник», а через b понятие «треугольник с прямым углом», то схема данного определения прямоугольного треугольника будет такова: «a есть b».

Неявные определения не имеют формы совпадения двух понятий. Примерами таких определений являются так называемые **контекстуальные** и **остенсивные** определения.

В контекстуальных определениях содержание нового понятия раскрывается через отрывок текста, через контекст, через анализ конкретной ситуации, описывающей смысл вводимого понятия. Примером контекстуального определения может быть определение уравнения и его решения, приведенное в пробном учебнике для II класса[1]. Здесь после записи $3+x=9$ и перечня чисел 2, 3, 6 и 7 идет текст: «x — неизвестное число, которое надо найти. Какое из этих чисел надо поставить вместо x, чтобы равенство было верным? Это число 6». Из этого текста следует, что уравнение — это равенство с неизвестным числом, которое надо найти, а

[1] Моро М. И. и др. Математика, 2 класс: Пробный учебник.— М., 1986.

решить уравнение — это значит найти такое значение x, при подстановке которого в уравнение получается верное равенство.

Остенсивные определения используются для введения терминов путем демонстрации объектов, которые этими терминами обозначают. Поэтому остенсивные определения называют еще определениями путем показа. Например, таким способом определяются в начальной школе понятия равенства и неравенства.

$2\cdot7>2\cdot6$	$9\cdot3=27$
$78-9<78$	$6\cdot4=4\cdot6$
$37+6>37$	$17-5=8+4$
Это неравенства	Это равенства

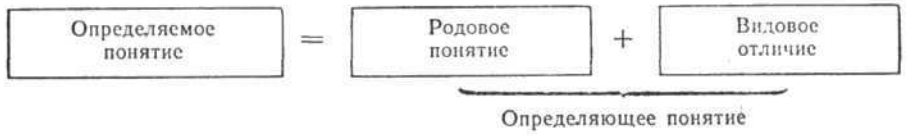
В явных определениях, как уже было отмечено, отождествляются два понятия. Одно из них называют **определяемым понятием,** другое — **определяющим.** Через определяющее раскрывается содержание определяемого понятия.

Проанализируем, например, структуру определения квадрата: «Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны». Она такова: сначала указано определяемое понятие — «квадрат», а затем приведено определяющее, которое включает свойства: быть прямоугольником; иметь все равные стороны.

Свойство «быть прямоугольником» указывает, что все квадраты являются прямоугольниками, т. е. понятие «прямоугольник» является более общим, чем понятие «квадрат». Его называют родовым по отношению к определяемому понятию «квадрат».

Второе свойство — «иметь равные стороны» — это указание видового свойства, которое отличает квадрат от других видов прямоугольника.

Такую же структуру имеют и другие определения школьного курса математики. Схематично структуру таких определений можно представить следующим образом:



Определение понятия по такой схеме называют определением через **род и видовое отличие.**

Встречаются в математике и определения, построенные по-другому. Рассмотрим, например, такое определение треугольника: «Треугольником называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков». В этом определении указано родовое понятие по отношению к треугольнику — фигура, а затем дан способ построения такой фигуры, которая является треугольником: взять три

точки, не лежащие на одной прямой, и соединить каждую их пару отрезком. Такие определения называют **генетическими**[1].

Обратимся теперь к определению арифметической прогрессии: «Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом». Здесь определяемое понятие — «арифметическая прогрессия», родовое понятие — «числовая последовательность», а далее описывается способ получения всех членов прогрессии, начиная со второго. Это определение можно записать в виде формулы $a_n = a_{n-1} + d$, где $n \geqslant 2$. Такое определение называют **индуктивным**[2] или **рекуррентным**[3].

В начальном курсе математики имеется очень небольшое число понятий, которым дают определения через род и видовое отличие. Так, например, определяют умножение: «Сложение одинаковых слагаемых называется умножением». Но чаще при введении понятий в начальной школе используют остенсивные и контекстуальные определения. Иногда встречаются определения, сочетающие контекст и показ. Примером такого определения является определение прямоугольника, приведенное в учебнике математики для II класса. Здесь нарисованы (показаны) четырехугольники и приведен текст: «У этих четырехугольников все углы прямые». Под рисунком написано: «Это прямоугольники».

Упражнения

1. Укажите ближайшее родовое понятие для понятия: 1) прямоугольник; 2) отрезок; 3) нечетное число; 4) окружность.

2. В каких случаях верно утверждение «Понятие a является родовым по отношению к понятию b»: 1) a — многоугольник, b — треугольник; 2) a — угол, b — острый угол; 3) a — луч, b — прямая; 4) a — ромб, b — квадрат?

3. В нижеприведенных определениях выделите определяемое понятие, родовое понятие и видовое отличие: 1) Прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. 2) Треугольник называется равнобедренным, если хотя бы две его стороны равны. 3) Значение переменной, которое обращает уравнение в истинное равенство, называется корнем уравнения. 4) Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется его средней линией.

4. Приведите примеры генетических и индуктивных определений из курса алгебры.

5. Понятие «трехзначное число» вводится в начальных классах так: учащимся предлагается ответить на вопрос: «Сколько всего цифр (знаков) используется для записи каждого из чисел: 582, 336, 400, 841, 804, 333, 565?» Затем учитель делает заключение: «Это трехзначные числа».

Каким образом в этом случае определено понятие трехзначного числа?

6. С понятием «противоположные стороны прямоугольника» учащихся знакомят так: «Красными линиями обозначены две противоположные стороны прямоугольника, а синими линиями — две другие противоположные стороны».

Каким образом определено это понятие, если в учебнике, кроме текста, есть еще и соответствующий рисунок?

7. Установите, каким образом определяются в математике I—IV классов понятия: 1) математическое выражение; 2) деление; 3) произведение; 4) нечетное число; 5) периметр; 6) однозначное число; 7) двузначное число; 8) сантиметр.

[1] От слова «генезис», т. е. происхождение.
[2] От слова «индукция», т. е. наведение на рассуждение от частного к общему.
[3] От слова «рекурсия», т. е. возвращение.

4. Требования к определению понятий

Чтобы оценить правильность явных определений, надо знать правила определения понятий. Так как преобладающее большинство определений в школьном курсе математики — это определения через род и видовое отличие, то речь будет идти о правилах этих определений.

Прежде всего **определяемое и определяющее понятия должны быть соразмерны.** Это значит, что совокупности предметов, охватываемые ими, должны совпадать. Соразмерны, например, понятия «прямоугольник» и «четырехугольник, в котором все углы прямые». Если же объем определяющего понятия включает в себя объем понятия определяемого, то говорят об ошибке слишком широкого определения. Так, определение «Прямые a и b называются параллельными, если они не имеют общих точек или совпадают» слишком широко, поскольку ему удовлетворяют и скрещивающиеся прямые. Если же объем определяющего понятия уже объема определяемого понятия, то имеет место ошибка слишком узкого определения. Например, определение «Прямые a и b называются параллельными, если они не имеют общих точек» слишком узко, поскольку ему не удовлетворяют совпадающие прямые.

Второе правило определения **запрещает порочный круг:** нельзя определять понятие через само себя или определять его через другое понятие, которое, в свою очередь, определяется через него. Возьмем такие понятия начальной математики, как «умножение» и «произведение», и дадим им следующие определения:

Умножением чисел называется действие, при помощи которого находят произведение этих чисел.

Произведением чисел называется результат их умножения.

Видим, что умножение определяется через понятие произведения, а произведение — через понятие умножения. Определения образовали, как говорят в математике, порочный круг. В ре-

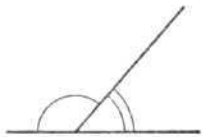


Рис. 2

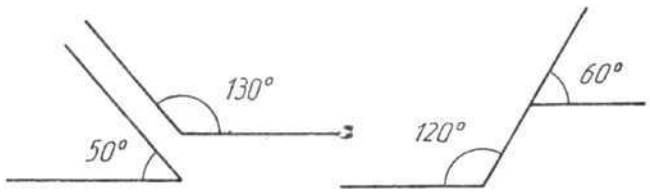


Рис. 3

зультате цепочка последовательных определений, выстроенных в рамках курса, прерывается.

Порочный круг содержится и в таком определении: «Решением уравнения называется число, которое является его решением». Здесь понятие «решение уравнения» определяется, по сути дела, через решение уравнения.

Третьим важным требованием к логически правильному определению понятия является следующее: **в определении должны быть указаны все свойства, позволяющие однозначно выделять** объекты, **принадлежащие объему определяемого понятия.**

Рассмотрим, например, такое определение понятия «смежные углы»: «Смежными называются углы, которые в сумме составляют 180°». Нетрудно увидеть, что под данное определение можно подвести не только углы, изображенные на рисунке 2 и действительно являющиеся смежными, но и углы, изображенные на рисунке 3. Почему так произошло? Дело в том, что в приведенном определении смежных углов указано лишь одно их свойство, а именно свойство составлять в сумме 180°, но его недостаточно для выделения смежных углов из всех других.

Еще одно требование к правильному определению понятия — **отсутствие в нем избыточности.** Это означает, что в определении не должно быть указано лишних свойств, вытекающих из других свойств, также включенных в определение понятия.

Рассмотрим определение: «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого противоположные стороны равны и все углы прямые». Можно показать, что включенное в определение свойство «иметь противоположные равные стороны» вытекает из свойства «иметь прямые углы». Следовательно, данное определение прямоугольника избыточное и правильнее определять прямоугольник таким образом: «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые».

Следует сказать, что в любом определении понятия есть элемент произвола, что проявляется, во-первых, в выборе термина (прямоугольник, в котором все стороны равны, мог бы называться и по-другому), а во-вторых, в выборе свойств, включаемых в определение. В принципе понятие квадрата можно определить так: «Квадратом называется ромб, у которого все углы прямые» — или так: «Квадратом называется параллелограмм, у которого все

стороны равны, а углы прямые». Различные определения одного и того же понятия возможны потому, что из большого числа свойств, входящих в содержание этого понятия, в определение включаются только некоторые.

Если одному и тому же понятию даются, например, два разных определения, то они должны быть равносильными. Это означает, что из свойств, включенных в одно определение, должны вытекать свойства, положенные в основу другого определения, и наоборот.

Чем же руководствуются, когда из возможных определений некоторого понятия выбирают одно? Исходят из того, какое определение проще, естественнее или целесообразнее для дальнейшего построения теории.

Если же какие-либо свойства оказываются включенными в определение, то другие свойства тех же объектов могут быть логически выведены из тех, что вошли в определение. Это важное положение используют при решении задач на распознавание. Если объект A принадлежит объему определяемого понятия, то он обладает всеми свойствами, которые указаны в определении понятия. Справедливо и обратное утверждение, т. е. если известно, что объект A обладает всеми свойствами, которые указаны в определении понятия, называемого некоторым термином, то и объект A можно назвать этим термином.

Пример. Используя определение диаметра окружности, установим, в каком из случаев, представленных на рисунке 4, отрезок CD является диаметром.

Определим диаметр окружности следующим образом: диаметром окружности называется хорда, проходящая через ее центр. Чтобы отрезок CD оказался диаметром окружности, достаточно одновременное выполнение двух условий: отрезок CD должен быть хордой окружности и проходить через ее центр. Этим двум условиям удовлетворяет отрезок CD в случае «а». В случае «б» отрезок CD — хорда, но он не проходит через центр окружности; в случае «в» отрезок CD проходит через центр окружности, но не является хордой.

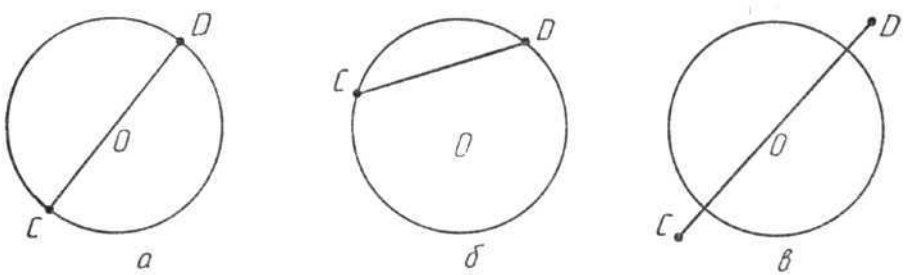


Рис. 4

Еще одним требованием к логически правильному определению понятия является следующее: необходимо, чтобы определяемый объект существовал. Рассмотрим, например, такое определение: «Тупоугольным треугольником называется треугольник, у которого все углы тупые». Нетрудно убедиться в том, что треугольник, у которого все углы тупые, не существует. Следовательно, данному определению реально ничего не соответствует, и поэтому оно не может считаться логически правильным.

Заметим, что в математике для ответа на вопрос, существует ли объект, удовлетворяющий данному определению, как правило, доказывают специальную теорему, подтверждающую возможность существования объекта, о котором говорится в определении. В геометрии существование объекта, удовлетворяющего определению, иногда обосновывают построив его.

Упражнения

1. Сформулируйте определение прямоугольного треугольника и выявите его структуру.

2. Учащийся определил прямой угол как угол, стороны которого взаимно перпендикулярны, а взаимно перпендикулярные прямые как прямые, образующие при пересечении прямые углы. Какую ошибку допустил учащийся?

Каким образом могут быть ознакомлены учащиеся начальных классов с понятием прямого угла?

3. Учащийся по аналогии с определением остроугольного треугольника сформулировал такое определение остроугольного четырехугольника: «Остроугольным четырехугольником называется выпуклый четырехугольник, все углы которого острые». Можно ли считать это определение правильным?

4. Один учащийся определил понятие прямоугольника так: «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые и стороны попарно равны».

Второй учащийся сказал: «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые».

И наконец, третий дал такое определение: «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого противоположные стороны равны».

Какой из учащихся дал правильное определение понятия прямоугольника?

Можно ли определить это понятие еще каким-либо образом?

5. В каких из приведенных ниже определений математических понятий имеются ошибки? Исправьте их, если это возможно.

1) Биссектрисой треугольника называется прямая, делящая угол треугольника пополам. 2) Диаметром круга называется хорда, проходящая через центр круга. 3) Касательной к окружности называется прямая, которая касается окружности. 4) Ромбом называется параллелограмм, две смежные стороны которого

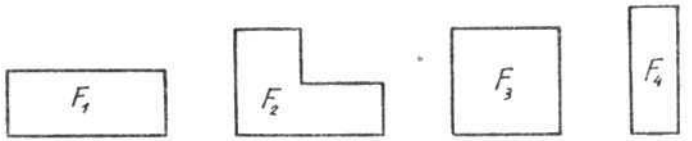


Рис. 5

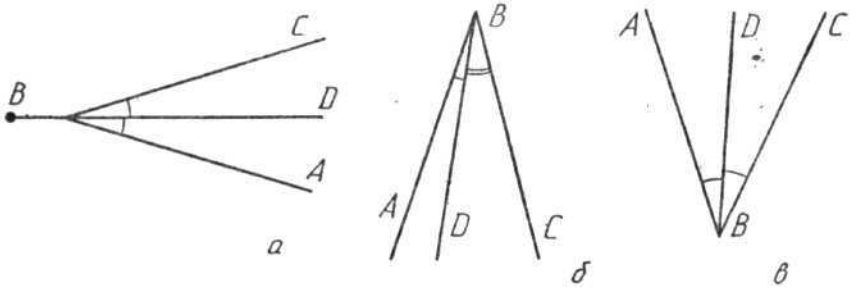


Рис. 6

равны. 5) Сложением называется действие, при котором числа складываются. 6) Равносторонним треугольником называется треугольник, у которого равны все его стороны и все его углы. 7) Параллелограммом называется многоугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

6. Проанализируйте логическую структуру определения прямоугольника (через четырехугольник) и установите, какие из фигур (рис. 5) являются прямоугольниками.

7. Дайте определение биссектрисы углы и установите, на каком из рисунков луч BD является биссектрисой угла (рис. 6).

8. Сформулируйте определение понятия «квадрат», указав в качестве родового понятия «прямоугольник». Пользуясь данным определением, укажите условия, при которых: 1) фигура будет являться квадратом; 2) фигура не будет являться квадратом.

9. Достаточно ли нижеприведенное условие для того, чтобы четырехугольник был прямоугольником: 1) он имеет две пары параллельных сторон; 2) три его угла являются прямыми; 3) его диагонали конгруэнтны; 4) две его стороны параллельны?

10. Приведите примеры задач на распознавание фигур и других объектов из учебников математики для начальных классов.

§ 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

5. Элементарные и составные предложения

Познавая окружающий мир, человек устанавливает различные взаимосвязи между объектами, между объектами и их свойствами и др. В языке эти связи выражаются с помощью предложений,

которые образуются из понятий. Например: «В равностороннем треугольнике все углы равны», «Число 28 делится на 7».

Каждое математическое предложение характеризуется содержанием и логической структурой. Наше внимание будет обращено в основном на структуру предложений.

В математике различают **элементарные** и **составные** предложения. Предложение «Число 28 делится на 7» элементарное. Составными предложениями являются, например, следующие:

1) число 28 четное и делится на 7;

2) число x меньше или равно 8;

3) если треугольник равнобедренный, то углы в нем при основании равны;

4) число 14 не делится на 4.

Составные предложения образуются из элементарных с помощью слов «и», «или», частицы «не» и некоторых других. Эти слова в математике называют **логическими связками.**

Выявить логическую структуру составного предложения — значит установить:

1) из каких элементарных предложений образовано данное составное предложение;

2) с помощью каких логических связок оно образовано.

Раскроем, например, логическую структуру предложения «Число 28 четное и делится на 7». Оно состоит из двух элементарных предложений: предложения A — «Число 28 четное» и предложения B — «Число 28 делится на 7». Соединены они в одно составное предложение с помощью логической связки «и». Используя введенные обозначения элементарных предложений, можно сказать, что данное составное предложение имеет логическую структуру (форму) «A и B».

Второе предложение устроено иначе. Если обозначить через A предложение «Число x меньше 8», а через B предложение «Число x равно 8», то тогда о предложении «Число x меньше или равно 8» можно сказать, что оно имеет структуру «A или B».

Предложение «Если треугольник равнобедренный, то углы в нем при основании равны» имеет структуру «Если A, то B», где буквой A обозначено предложение «Треугольник равнобедренный», а буквой B — предложение «Углы в треугольнике при основании равны».

Чтобы раскрыть структуру последнего предложения, обозначим через A предложение «Число 14 делится на 4». Тогда про предложение «Число 14 не делится на 4» можно сказать, что оно имеет форму «Не A» или «Неверно, что A».

Упражнения

1. Какие из следующих предложений элементарные, а какие составные: 1) в равнобедренном треугольнике ABC (рис. 7) биссектриса BD является медианой и высотой; 2) в прямоугольном

треугольнике ABD квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов; 3) площадь треугольника ABC равна половине произведения основания AC на высоту BD; 4) если треугольник ABC равнобедренный, то углы в нем при основании равны; 5) в треугольнике ABD катет BD длиннее катета AD или равен ему?

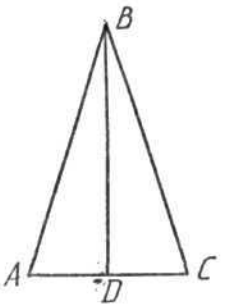


Рис. 7

2. Раскройте логическую структуру каждого высказывания: 1) число 12 четное и делится на 6; 2) если углы вертикальные, то они равны; 3) число $\sqrt{3}$ является рациональным или иррациональным; 4) треугольник ABC не является равносторонним; 5) если число целое и положительное, то оно натуральное.

3. Завершите предложения и раскройте их логическую структуру: 1) средняя линия треугольника параллельна основанию и ...; 2) если $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ или ... .

4. Приведите примеры математических предложений, имеющих структуру: 1) A и B; 2) A или B; 3) если A, то B.

6. Высказывания. Смысл слов «и», «или», «не»

Среди суждений, устанавливающих различные отношения между математическими понятиями, выделяют **высказывания** и высказывательные формы.

Высказыванием называется **предложение, относительно которого имеет смысл вопрос, истинно оно или ложно.**

Например, предложение «Число 6 четное» есть истинное высказывание, а предложение «$2+4=3^2$» — ложное высказывание.

Вообще каждому высказыванию приписывают одно из двух значений: И (истина), если оно истинно, и Л (ложь), если оно ложно. Значения И и Л называют значениями истинности высказывания. Если высказывание элементарное, то его значение истинности определяют по содержанию, опираясь на известные знания.

А как быть, если высказывание составное? Как определить значение истинности такого высказывания? Здесь на помощь приходит форма высказывания.

Считают, что высказывание вида «A и B» истинно, если истинны оба высказывания A и B. Если же хотя бы одно из них ложно, то высказывание «A и B» ложно.

Пример. Установим, истинно или ложно высказывание: 1) число 102 четное и делится на 9; 2) $3<6<7$.

В случае 1 составное высказывание имеет форму «A и B», где A — «Число 102 четное», а B — «Число 102 делится на 9». Легко видеть, что высказывание A истинное, а высказывание B ложное (число 102 не делится на 9, так как на 9 не делится сумма цифр в записи этого числа). Следовательно, и все предложение ложное.

В случае 2 мы также имеем составное высказывание «$3<6$ и $6<7$». Оно истинно, так как образовано из двух элементарных истинных высказываний с помощью союза «и».

Обратимся теперь к высказываниям вида «A или B». **Считают, что оно истинно, если истинно хотя бы одно из высказываний A и B. Высказывание «A или B» ложно, когда ложны оба высказывания A и B.**

Пример. Установим, истинны ли высказывания:

1) число 102 четное или делится на 3;

2) $3 \leqslant 7$;

3) $5 \leqslant 3$.

В случае 1 составное высказывание имеет форму «A или B», где A — «Число 102 четное», B — «Число 102 делится на 3». Видим, что высказывания A и B истинны, следовательно, данное составное высказывание истинно.

В случае 2 имеем также составное высказывание, имеющее форму «A или B», где A — «$3<7$», B — «$3=7$». Поскольку высказывание A истинно, то истинно и все составное высказывание $3 \leqslant 7$.

Высказывание $5 \leqslant 3$ (случай 3) — ложное высказывание, так как оно состоит из двух ложных высказываний $5<3$, $5=3$, соединенных логической связкой «или».

Часто в математике приходится строить высказывания, в которых что-либо отрицается. Например, дано высказывание «Число 12 простое». Это ложное высказывание, так как число 12 делится не только на себя и на 1, но и на другие числа. Построим его отрицание: «Неверно, что число 12 простое». Получили истинное высказывание. Можно построить отрицание того же высказывания иначе: «Число 12 не является простым». Это тоже истинное высказывание.

Отрицание высказывания A обозначают $\overline{A}$. Символ $\overline{A}$ читают: «Не A» или «Неверно, что A».

Вообще **отрицанием высказывания A называется высказывание $\overline{A}$, которое истинно, если высказывание A ложно, и ложно, когда A истинно.**

Таким образом, значение истинности составных высказываний, образованных из элементарных с помощью слов «и», «или», «не», зависит от значения истинности составляющих их элементарных высказываний.

A	B	A и B	A или B	Не A
И	И	И	И	Л
И	Л	Л	И	
Л	И	Л	И	И
Л	Л	Л	Л	

Упражнения

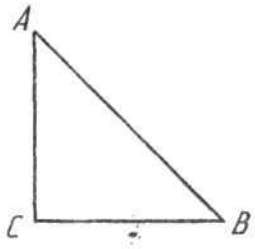


Рис. 8

1. Среди следующих предложений укажите высказывания и определите их значения истинности: 1) число 8 целое; 2) при делении 42 на 5 получается остаток 3; 3) $x<3$; 4) в любом прямоугольнике диагонали равны; 5) $34 \cdot 2 - 17 = 51$.

2. Какие из высказываний истинны: 1) число 6 делится на 2 и на 3; 2) число 123 делится на 3 и на 9; 3) треугольник ABC (рис. 8) прямоугольный или равносторонний; 4) один из углов треугольника ABC (рис. 8) равен 60°; 5) $\frac{2}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$?

3. Постройте отрицания следующих высказываний: 1) число 132 делится на 9; 2) $5<4$; 3) 3,2 — число натуральное; 4) треугольник ABC (рис. 8) равносторонний.

4. Известно, что высказывание A истинно. Можно ли, зная лишь это, определить значение истинности высказывания вида: 1) A и B; 2) A или B?

5. Известно, что высказывание A ложно. Можно ли, зная лишь это, определить значение истинности высказывания вида: 1) A и B; 2) A или B?

6. Являются ли следующие пары высказываний отрицаниями друг друга: 1) число 253 простое. Число 253 составное; 2) треугольник ABC (рис. 8) прямоугольный и равносторонний. Треугольник ABC (рис. 8) не является прямоугольным или не является равносторонним?

7. Можно ли определить значение истинности высказывания A, если известно, что: 1) «A и B» — истинное высказывание; 2) «$\overline{A}$ или $\overline{B}$» — истинное высказывание?

7. Высказывательные формы

В математике часто встречаются предложения, содержащие одну или несколько переменных. Например: $x<3$; $x+y=8$. Эти предложения не являются высказываниями, так как относительно их не имеет смысла вопрос, истинны они или ложны. Но при подстановке значений переменных эти предложения обращаются в высказывания (истинные или ложные). Так, если в предложение $x<3$ подставить $x=2$, получим истинное высказывание $2<3$, а при $x=4$ оно обращается в ложное высказывание $4<3$.

Предложения такого вида называют **высказывательными формами.** Каждая высказывательная форма порождает высказывания одной и той же формы. Например, предложение $x<3$ позволяет получить высказывания вида $1<3$, $2<3$, $5<3$, $10<3$ и т. д.

Высказывательная форма $x<3$ содержит одну переменную.

Такие высказывательные формы называют **одноместными.** Предложение $x+y=8$, содержащее две переменные, есть **двухместная** высказывательная форма.

Итак, **высказывательная форма — это предложение с одной или несколькими переменными, которое обращается в высказывание при подстановке в него конкретных значений переменных.**

Понятие высказывательной формы можно рассматривать как обобщение известных понятий: уравнения с одной, двумя и т. д. переменными, неравенства с переменными и др.

Относительно высказывательной формы возникает вопрос: при каких значениях переменных эта форма обращается в истинное высказывание? Если высказывательная форма — уравнение (или неравенство с переменной), то, чтобы дать ответ на этот вопрос, надо уравнение (или неравенство) решить.

Пример. Найдем, при каком значении переменной x высказывательная форма $3x-4=5$ обращается в истинное высказывание.

Решим уравнение $3x-4=5$. Имеем $3x=9$, $x=3$.
Следовательно, данное уравнение обращается в истинное высказывание $3\cdot3-4=5$ при $x=3$.

Так же как и высказывания, высказывательные формы бывают элементарными и составными. Составные образуются из элементарных при помощи логических связок «и», «или», частицы «не».

Упражнения

1. Среди следующих предложений укажите высказывательные формы: 1) $x^2-5x+4=0$; 2) $2x-3<7$; 3) $2\cdot4-3<7$; 4) любое число является решением неравенства $2x-3<7$; 5) некоторые числа являются решением неравенства $2x-3<7$.

2. Из высказывательной формы $x^2-5x=0$ получите 3 высказывания. При каких значениях x данная высказывательная форма обращается в истинное высказывание?

3. Найдите, при каких значениях переменной y следующие высказывательные формы обращаются в истинные высказывания: 1) $2y-5=7-y$; 2) $2y-3<7$.

4. Даны числа: 21, 52, 409, 248, 30, 2094, 322, 22, 371, 142, 2, 222, 14, 20.

1) Выпишите все числа, в записи которых две цифры и есть цифра 2. 2) Выпишите все числа, в записи которых две цифры или есть цифра 2.

8. Смысл слов «все» и «некоторые»

Про числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 можно сказать:
а) **все** данные числа однозначные;
б) **некоторые** из данных чисел четные.

Так как относительно этих предложений можно сказать, что они истинны или ложны, то полученные предложения — высказывания.

Выясним, как устроены такие предложения.

Если из предложения «а» убрать слово «все», то получим предложение «Данные числа однозначные». Это высказывательная форма (хотя переменной в явном виде предложение не содержит), так как вопрос «Истинно это предложение или ложно?» смысла не имеет. Значит, слово «все», поставленное перед данной высказывательной формой, обращает ее в высказывание.

Предложение «б» устроено аналогично, только высказывательную форму «Данные числа четные» обращает в высказывание слово «некоторые».

Слова «все» и «некоторые» называют **кванторами.** Слово «квантор» латинского происхождения и означает «сколько», т. е. квантор показывает, о скольких (всех или некоторых) объектах говорится в том или ином предложении.

Различают **кванторы общности и существования.**

Кванторы общности — это слова **«любой», «всякий», «каждый», «все».**

Кванторы существования — это слова **«существует», «некоторые», «найдется», «хотя бы один».**

Таким образом, если перед одноместной высказывательной формой поставить какой-либо квантор (т. е. слово «любой», «всякий», «существует» и т. д.), то получаем высказывание. Значит, получить из одноместной высказывательной формы высказывание можно не только подставляя в нее конкретные значения переменной, но и поставив перед высказывательной формой квантор (общности или существования).

Форму высказывания с квантором имеют многие математические предложения, например:

все квадраты являются прямоугольниками;

некоторые четные числа делятся на 4;

в любом прямоугольнике сумма внутренних углов равна 360°.

Часто в высказываниях квантор опускается; например, переместительный закон сложения чисел записывают в виде равенства $a+b=b+a$, которое означает, что для **любых** чисел a и b справедливо равенство $a+b=b+a$, т. е. переместительный закон сложения есть высказывание с квантором общности.

Как устанавливают значение истинности высказываний с квантором?

Рассмотрим высказывания:

1. Любое число 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 является решением неравенства $x+2>x$.

2. Сумма любых трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

3. Любой прямоугольник является квадратом.

Как устроены данные высказывания? Все они содержат квантор общности, выраженный словом «любой». Истинны или ложны эти высказывания?

Обратимся к первому предложению. Чтобы убедиться в том, что **любое** из чисел 0, 1, 2, ..., 9 является решением неравенства $x+2>x$, рассмотрим случаи:

При $x=0$ имеем $0+2>0$, т. е. истинное числовое неравенство.
При $x=1$ имеем $1+2>1$, т. е. истинное числовое неравенство.
При $x=2$ имеем $2+2>2$, т. е. истинное числовое неравенство.
. . . . . .
При $x=9$ имеем $9+2>9$, т. е. истинное числовое неравенство.

Действительно, любое число из совокупности 0, 1, 2, ..., 9 является решением неравенства $x+2>x$, т. е. высказывание «Любое число 0, 1, 2, ..., 9 является решением неравенства $x+2>x$» — истинное высказывание. Каким образом мы установили это? Доказали, рассмотрев все частные и возможные случаи. Способ доказательства, который был использован нами, называется **полной индукцией.**

Обратимся теперь ко второму предложению. Доказательство, аналогичное тому, что использовалось для первого предложения, здесь неприемлемо, поскольку мы не имеем возможности рассмотреть все случаи. Нужен другой способ доказательства.

Обозначим последовательные натуральные числа через x, $x+1$ и $x+2$ и докажем, что при любом x сумма $x+(x+1)+(x+2)$ делится на 3.

Выражение $x+(x+1)+(x+2)$ можно преобразовать к виду $x+x+1+x+2=3x+3=3(x+1)$. Так как 3 делится на 3, то и произведение $3(x+1)$ делится на 3. Следовательно, и сумма любых трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

Рассмотрим третье предложение. Это — ложное высказывание. Чтобы убедиться в этом, достаточно начертить прямоугольник, не являющийся квадратом. Мы опровергли данное высказывание, приведя контрпример.

Подведем итоги. Нами установлено, что первое и второе предложения — истинные высказывания. Сделали мы это путем доказательства. Третье предложение ложное. Убедились мы в этом, приведя контрпример.

Вообще, **истинность высказываний с квантором общности устанавливается путем доказательства. Чтобы убедиться в ложности таких высказываний (опровергнуть их), достаточно привести контрпример.**

Выясним, как устанавливают значение истинности высказывания с квантором существования. Рассмотрим высказывания:

1. Существуют натуральные числа, кратные 3.
2. Существуют прямоугольные равносторонние треугольники.

Первое высказывание истинное. Чтобы обосновать этот вывод, достаточно привести пример. Так, 9 — число натуральное и делится на 3.

Второе высказывание ложное. Действительно, в прямоугольном треугольнике один угол обязательно содержит 90°, а в равностороннем треугольнике величина всех углов 60°. Значит, среди прямоугольных треугольников равносторонних нет.

Таким образом, чтобы обосновать вывод во втором случае, нам пришлось провести доказательство.

Вообще **истинность высказывания с квантором существования устанавливается при помощи конкретного примера. Чтобы убедиться в ложности такого высказывания, необходимо провести доказательство.**

В начальном курсе математики высказывания с кванторами встречаются часто. По существу, все высказывания общего характера являются высказываниями с квантором общности. Такими являются, например, высказывания:

$$a+b=b+a \qquad 0+a=a \qquad ab=ba$$
$$0\cdot a=0 \qquad 1\cdot a=a \qquad a:1=a \text{ и др.}$$

Действительно, для любых натуральных чисел b и a имеет место переместительное свойство сложения и умножения; для любого натурального числа a справедливы равенства $0+a=a$, $0\cdot a=0$ и др.

Упражнения

1. Проанализируйте структуру следующих предложений: 1) некоторые нечетные числа делятся на 9; 2) во всяком прямоугольнике диагонали равны; 3) хотя бы одно из чисел первого десятка составное; 4) произведение двух любых последовательных натуральных чисел кратно 2.

2. Истинность каких предложений, данных в упражнении 1, можно установить, проведя доказательство?

3. Докажите или опровергните следующие высказывания: 1) в любом четырехугольнике диагонали равны; 2) некоторые нечетные числа делятся на 4; 3) существуют четные числа, кратные 7; 4) все прямоугольники являются многоугольниками.

4. Докажите, используя полную индукцию, истинность высказывания: 1) все однозначные натуральные числа являются решением уравнения $2\cdot(x+3)=6+2x$; 2) каждое четное натуральное число, большее 4, но меньшее 20, представимо в виде суммы двух простых чисел.

5. Какие из следующих высказываний истинны: 1) всякий квадрат является параллелограммом; 2) всякий ромб является квадратом; 3) во всяком ромбе диагонали в точке пересечения делятся пополам?

6. В какие из нижеприведенных предложений можно добавить слово «всякий» или «существует», чтобы предложение стало истинным высказыванием: 1) диагонали делят углы ромба пополам;

2) противоположные углы параллелограмма в сумме составляют 180°; 3) диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны?

9. Правила построения отрицаний высказываний, содержащих кванторы

Рассмотрим высказывание: «Все натуральные числа делятся на 3». В том, что это ложное высказывание, легко убедиться, приведя контрпример. Так, натуральное число 17 не делится на 3.

Построим отрицание данного высказывания. Можно сказать: «Неверно, что все натуральные числа делятся на 3». Это предложение истинное, и по смыслу оно совпадает с предложением «Существуют натуральные числа, которые не делятся на 3».

Таким образом, отрицание высказывания «Все натуральные числа делятся на 3» можно построить двумя способами:

1) поставив перед данным предложением слова «неверно, что»;

2) заменив квантор общности на квантор существования, а предложение, стоящее после квантора, его отрицанием.

Заметим, что предложение «Все натуральные числа не делятся на 3» не является отрицанием высказывания «Все натуральные числа делятся на 3», поскольку оно ложно так же, как и данное высказывание.

Возьмем теперь предложение с квантором существования: «Некоторые нечетные числа делятся на 4». Это ложное высказывание: все нечетные числа не делятся на 2 и, следовательно, не делятся на 4.

Построим отрицание данного высказывания. Можно сказать: «Неверно, что некоторые нечетные числа делятся на 4». Это предложение истинное и по смыслу совпадает с таким: «Все нечетные числа не делятся на 4».

Таким образом, отрицание высказывания «Некоторые нечетные числа делятся на 4» можно построить двумя способами:

1) поставив перед данным предложением слова «неверно, что»;

2) заменив квантор существования на квантор общности, а предложение, стоящее после квантора, его отрицанием.

При построении отрицаний высказываний мы воспользовались правилом, которое принимаем без доказательства.

Отрицание высказывания с квантором (общности или существования) может быть построено двумя способами:

1) перед данным высказыванием ставятся слова «неверно, что»;

2) квантор общности (существования) заменяется квантором существования (общности), а предложение, стоящее после квантора, заменяется его отрицанием.

Заметим, что сформулированное правило является достаточным для правильного построения отрицания высказываний с квантором. Отрицание данного высказывания может быть построено и в другой форме. Важно только соблюдение требования: если данное высказывание ложно, то его отрицание должно быть истинным, и наоборот.

Упражнения

1. Определите, являются ли следующие пары предложений отрицаниями друг друга:

1) число 289 кратно 9. Число 289 не кратно 9;

2) любое натуральное число делится на 5. Любое натуральное число не делится на 5;

3) всякий многоугольник является четырехугольником. Существуют многоугольники, не являющиеся четырехугольниками;

4) некоторые натуральные числа меньше единицы. Каждое натуральное число не меньше единицы.

2. Докажите, что следующие высказывания ложны, и постройте их отрицания двумя способами:

1) всякое свойство квадрата присуще прямоугольнику;

2) любое натуральное число является решением уравнения $2x-3=1$;

3) существует натуральное число, являющееся решением уравнения $x^2=-1$.

3. Какие из нижеприведенных высказываний являются отрицаниями предложения «Всякое четное число делится на 3»:

1) всякое четное число не делится на 3;

2) неверно, что всякое четное число делится на 3;

3) существует четное число, которое не делится на 3;

4) некоторые четные числа делятся на 3;

5) не всякое число делится на 3?

4. Среди следующих предложений найдите отрицание высказывания «Существует натуральное число, являющееся решением неравенства $2x+6<2$»:

1) все натуральные числа не являются решением неравенства $2x+6<2$;

2) существует натуральное число, не являющееся решением неравенства $2x+6<2$;

3) неверно, что существует натуральное число, являющееся решением неравенства $2x+6<2$;

4) не существует натурального числа, являющегося решением неравенства $2x+6<2$.

5. Получив равенства $3+5=8$, $9+5=14$, $11+17=28$, учащийся сделал вывод: сумма любых двух нечетных чисел есть число четное. Верен ли этот вывод? Можете ли вы придумать два нечетных числа, суммой которых является нечетное число? Доказывает ли ваш ответ, что таких двух нечетных чисел не существует?

10. Отношения следования и равносильности между предложениями

Любое рассуждение не обходится без слов «следовательно», «из данного предложения следует», «отсюда вытекает». Какой смысл вкладывается в эти слова?

Возьмем два предложения: предложение A — «x кратно 4» и предложение B — «x кратно 2». Они связаны между собой: любое число, кратное 4, будет кратно 2, или иначе: из того, что число кратно 4, следует, что оно кратно 2.

Говорят, что **из предложения A следует предложение B, если всякий раз, когда истинно предложение A, истинно и предложение B.**

Предложение «Из A следует B» можно записать, используя символ $\Rightarrow$, таким образом: $A \Rightarrow B$. Знак «$\Rightarrow$» — это знак отношения следования между предложениями.

Запись $A \Rightarrow B$ читают по-разному: а) из A следует B; б) B следует из A; в) если A, то B; г) есть A, следовательно, есть B; д) всякое A есть B.

Например, предложение «Из того, что число x кратно 4, следует, что оно кратно 2» можно сформулировать еще и так: а) всякое число, которое делится на 4, делится и на 2; б) если число делится на 4, то оно делится и на 2; в) число x делится на 4. Следовательно, оно делится и на 2.

Пусть даны предложения: A — «Треугольник равнобедренный» и B — «Углы при основании треугольника равны». Выясним, как они связаны между собой.

В курсе геометрии доказано, что если треугольник равнобедренный, то углы в нем при основании равны (т. е. можно утверждать, что $A \Rightarrow B$), и обратно: если углы при основании треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный (т. е. $B \Rightarrow A$).

Если из предложения A следует предложение B, а из предложения B следует предложение A, то говорят, что предложения A и B равносильны.

Согласно этому определению предложения «Треугольник равнобедренный» и «Углы при основании треугольника равны» равносильны.

Предложение «A равносильно B» записывают, используя знак $\Leftrightarrow$: $A \Leftrightarrow B$.

Запись $A \Leftrightarrow B$ читают по-разному: а) A равносильно B; б) A тогда и только тогда, когда B; в) A, если и только, если B.

Пример. Даны предложения: A — «Углы X и Y вертикальные», B — «Углы X и Y равны». Выясним, в каком отношении находятся данные предложения.

В геометрии доказано, что если углы вертикальные, то они равны, т. е. $A \Rightarrow B$, а вот следования $B \Rightarrow A$ нет: из того, что углы равны, не следует, что они вертикальные. Значит, данные предложения не равносильны, они находятся только в отношении следования, причем из A следует B.

Упражнения

1. Установите, находятся ли в отношении следования предложения A и B, если: 1) A — «Число x кратно 3», B — «Число x кратно 9»; 2) A — «В четырехугольнике F диагонали равны», B — «Четырехугольник F — прямоугольник»; 3) A — «Число x четное», B — «Число x кратно 5»; 4) A — «Треугольник F прямоугольный», B — «Треугольник F равнобедренный».

2. Правильно ли употребили слово «следовательно»: 1) число a натуральное, следовательно, и $15 \cdot a$ — натуральное число; 2) число $15 \cdot a$ — натуральное число, следовательно, и a — натуральное число?

3. Известно, что $a > 2$. Следует ли отсюда, что: 1) $a - 2$ — положительное число; 2) $a - 4$ — положительное число; 3) $a - 1$ — положительное число?

4. Равносильны ли предложения A и B, если: 1) A — «Число x делится на 3», B — «Сумма цифр числа x делится на 3»; 2) A — «Каждое слагаемое суммы делится на 4», B — «Сумма делится на 4»?

5. Вставьте «и» либо «или» так, чтобы следующие предложения были истинными: 1) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \ldots b = 0$; 2) $a \cdot b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \ldots b \neq 0$.

6. Среди нижеприведенных высказываний укажите истинные и сформулируйте их в виде «Если..., то...»: 1) всякий угол, меньший прямого угла, острый; 2) всякий угол, меньший тупого угла, острый; 3) всякий острый угол меньше развернутого.

7. Установите, истинны или ложны следующие высказывания: 1) $x > 2 \Rightarrow x \neq 2$; 2) $x < 3 \Rightarrow x \neq 2$; 3) $x \neq 2 \Rightarrow x < 2$; 4) $x \neq 2 \Rightarrow x > 2$ или $x < 2$.

11. Необходимые и достаточные условия

Понятие отношения следования между предложениями позволяет уточнить смысл слов «необходимо» и «достаточно», которые часто употребляются в математике.

Если из предложения A следует предложение B, то говорят, что B — необходимое условие для A, а A — достаточное для B.

Другими словами, предложение B называется необходимым условием для A, если оно логически следует из A. Предложение A называется достаточным условием для B, если B из него следует.

$A \Rightarrow B$
B — необходимое условие для A
A — необходимое условие для B

Если предложения A и B равносильны, то говорят, что A — необходимое и достаточное условие для B, и наоборот.

Пример 1. Ранее мы установили, что из предложения A — «Углы X и Y вертикальные» следует предложение B — «Углы X и Y равны». Поэтому согласно данному выше определению можно сказать, что равенство углов — необходимое условие для того, чтобы углы были вертикальными, а вертикальность углов есть достаточное условие для их равенства. В связи с этим предложение «Если углы вертикальные, то они равны» можно сформулировать иначе, используя слова «необходимо» и «достаточно»:

1) Для того чтобы углы были вертикальными, необходимо, чтобы они были равны.

2) Для того чтобы углы были равны, достаточно, чтобы они были вертикальными.

Пример 2. Пусть A — предложение «Запись числа x оканчивается одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8», а B — предложение «Число x делится на 2». Как известно, из того, что запись числа x оканчивается одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8 следует, что это число делится на 2. Справедливо и обратное утверждение. Значит, данные предложения A и B равносильны и каждое из них является необходимым и достаточным условием для другого. Поэтому можно сказать: для того чтобы число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы запись этого числа оканчивалась одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8. Получили известный признак делимости чисел на 2.

Пример 3. Дано предложение: «Для того чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны». Выясним, нельзя ли сформулировать это предложение по-другому.

Поскольку предложение «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны» вытекает из предложения «Четырехугольник — ромб», то предложение «Для того чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны» можно сформулировать еще так:

1) Из того, что четырехугольник — ромб, следует, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

2) Во всяком ромбе диагонали взаимно перпендикулярны.

3) Если четырехугольник — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

4) Чтобы диагонали четырехугольника были взаимно перпендикулярны, достаточно, чтобы он был ромбом.

В начальном курсе математики слова «необходимо» и «достаточно», как правило, не употребляются, но зато широко используются их синонимы — соответственно слова «нужно» и «можно».

Приведем пример. Задача. В первой коробке 6 карандашей, во второй — на 2 меньше. Сколько карандашей в двух коробках?

Один из возможных путей поиска решения задачи может быть таким. Учитель спрашивает: Можно ли сразу узнать, сколько всего карандашей (т. е. достаточно ли данных в задаче, чтобы сразу ответить на ее вопрос)?

Учащийся отвечает:

— Нельзя. Нужно еще знать, сколько карандашей во второй коробке (т. е. необходимо это знать).

Учитель далее спрашивает:

— Можно ли узнать, сколько карандашей во второй коробке (т. е. достаточно ли данных в задаче, чтобы ответить на этот вопрос)?

— Можно,— отвечает учащийся.

— Что для этого нужно сделать? — спрашивает учитель и т. д.

Правильное употребление учащимся слов «нужно» и «можно» — залог успеха в использовании слов «необходимо» и «достаточно» при дальнейшем изучении математики.

Упражнения

1. Известно, что предложение «Если число делится на 4, то оно делится на 2» истинно. Сформулируйте его, используя слова «необходимо» и «достаточно».

2. Какие из следующих предложений можно переформулировать, употребив слова «необходимо» и «достаточно»: 1) всякий равносторонний треугольник является равнобедренным; 2) всякий прямоугольный треугольник является равнобедренным?

3. Переформулируйте следующие предложения, используя слова «если ..., то», «всякий», «следует»: 1) для того чтобы число делилось на 10, необходимо, чтобы его запись оканчивалась нулем; 2) для того чтобы $2a$ было целым числом, достаточно, чтобы a было целым числом.

4. Какие из приведенных ниже высказываний истинные: 1) для того чтобы число делилось на 2, необходимо, чтобы оно оканчивалось нулем; 2) для того чтобы число делилось на 3, достаточно, чтобы оно делилось на 6; 3) для того чтобы число делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 5; 4) для того чтобы число делилось на 15, необходимо, чтобы оно делилось на 5; 5) для того чтобы число делилось на 100, достаточно, чтобы оно делилось на 10?

5. Какие из следующих предложений можно сформулировать, употребив слова «необходимо и достаточно»: 1) всякое число, которое делится на 3 и на 5, делится на 15; 2) в прямоугольнике диагонали равны; 3) сумма двух четных чисел есть четное число?

6. Вместо многоточия вставьте слова «необходимо», либо «достаточно», либо «необходимо и достаточно» так, чтобы предложения были истинными: 1) для того чтобы сумма двух натуральных чисел делилась на 2, ..., чтобы каждое слагаемое делилось на 2; 2) для того чтобы число делилось на 72, ..., чтобы оно делилось на 8 и на 9; 3) для того чтобы число было отрицательным, ..., чтобы оно было меньше нуля; 4) для того чтобы угол был тупым, ..., чтобы он был больше прямого.

12. Структура теоремы. Виды теорем

Ранее мы отмечали, что существенные свойства объекта образуют содержание понятия об этом объекте. Часть этих свойств включается в определение понятия. Чтобы иметь достаточно полное представление об объекте, изучают и другие его свойства.

Свойства основных (первоначальных) понятий раскрываются в **аксиомах**[1] — предложениях, принимаемых без доказательства (в некоторой теории). Например, свойства основных понятий геометрии «точка», «прямая», «плоскость» включены в аксиомы:

Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие прямой, и точки, не принадлежащие прямой.

Через любые две точки можно провести прямую и только одну.

Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

Мы назвали лишь некоторые аксиомы, раскрывающие свойства данных понятий.

Вообще система аксиом любой математической теории, раскрывая свойства основных понятий, дает, по сути дела, их определения. Эти определения называются **аксиоматическими**.

Свойства понятий, не являющиеся основными и не включенные в определения, как правило, доказываются, т. е. выводятся как следствия из определения, аксиом и ранее доказанных свойств. Доказываемые свойства понятий чаще всего называют **теоремами**, иногда **следствиями** или **признаками**. В алгебре — **формулами, тождествами, правилами**. Несмотря на разные названия, устроены эти предложения одинаково. Поэтому будем называть их все теоремами.

Итак, **теорема — это высказывание о том, что из свойства *A* следует свойство *B*. Истинность этого высказывания устанавливается путем доказательства.**

Так как теорема есть высказывание вида $A \Rightarrow B$, то ее словесная формулировка может иметь различную форму (см. п. 10, 11). Однако, в каком бы виде ни была сформулирована теорема, в ней всегда выделяется **условие** A (что дано) и **заключение** B (что надо доказать).

Пусть дана теорема $A \Rightarrow B$. Образуем из нее высказывания вида $B \Rightarrow A$, $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$, $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Теоремы $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ называются **обратными** друг другу, а теоремы $A \Rightarrow B$ и $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ называются **противоположными** друг другу.

Теорему $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ называют **обратной противоположной**.

Пример. Дана теорема: «Если углы вертикальные, то они равны». Сформулируем теоремы обратную, противоположную и обратную противоположной.

Обратная данной: «Если углы равны, то они вертикальные». Это — ложное высказывание.

[1] Слово «аксиома» в переводе с греческого означает «достойное признание».

Противоположная данной: «Если углы не являются вертикальными, то они не равны». Это тоже ложное высказывание.

Обратная противоположной: «Если углы не равны, то они не вертикальные». Это — истинное высказывание.

Существует ли какая-нибудь связь между названными видами теорем?

Установлено, что теоремы $A \Rightarrow B$ и $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ равносильны, т. е. всегда, когда истинна теорема $A \Rightarrow B$, будет истинна и теорема $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, и наоборот:

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{B} \Rightarrow \overline{A}.$$

Полученную равносильность называют **законом контрапозиции**.

После того, как доказана какая-либо теорема вида $A \Rightarrow B$, имеет смысл исследовать обратную ей теорему. В каждом случае нужно проводить ее самостоятельное доказательство, так как теорема, обратная данной, может быть ложной. Так случилось, например, в рассмотренном выше примере.

Если окажутся верными и данная теорема и ей обратная, то можно их объединить в одну с помощью слов «тогда и только тогда, когда» или «необходимо и достаточно».

Упражнения

1. Выделите условие и заключение в каждой из теорем: 1) если в треугольнике все стороны равны, то и все углы равны; 2) сумма двух четных чисел — четное число; 3) если число кратно 3 и 4, то оно кратно 12; 4) для того чтобы разность делилась на данное число, достаточно, чтобы уменьшаемое и вычитаемое делились на это число; 5) для того чтобы разность натуральных чисел a и b была натуральным числом, необходимо и достаточно, чтобы $a > b$.

2. Дана теорема: «Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо, чтобы его противоположные стороны были равны». Выделите в этой теореме условие и заключение и переформулируйте ее, употребив слово: 1) следует; 2) всякий; 3) достаточно.

3. Какие из теорем равносильны теореме «Во всяком прямоугольнике диагонали равны»: 1) если четырехугольник — прямоугольник, то диагонали в нем равны; 2) если диагонали в четырехугольнике не равны, то этот четырехугольник не является прямоугольником; 3) если диагонали в четырехугольнике равны, то этот четырехугольник — прямоугольник; 4) для того чтобы диагонали в четырехугольнике были равны, достаточно, чтобы этот четырехугольник был прямоугольником?

4. Являются ли следующие пары теорем обратными друг другу: 1) если четырехугольник — квадрат, то в нем есть прямой угол.

Для того чтобы четырехугольник был квадратом, достаточно, чтобы в нем был прямой угол; 2) для того чтобы число было натуральным, необходимо, чтобы оно было положительным. Если число натуральное, то оно положительное?

5. Сформулируйте теоремы обратную, противоположную данной, а также обратную противоположной; установите, какие из них ложны: 1) если запись числа оканчивается нулем, то число делится на 5; 2) в ромбе диагонали взаимно перпендикулярны.

6. Сформулируйте теорему, обратную данной, и установите, можно ли данную теорему и ей обратную объединить в одну: 1) если углы смежные, то они в сумме составляют 180°; 2) если два угла треугольника равны, то и стороны лежащие против них, тоже равны.

§ 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

13. Дедуктивные рассуждения

Доказать теорему $A \Rightarrow B$ — это значит установить логическим путем, что всегда, когда выполняется свойство A, будет выполняться и свойство B.

Доказательство в математике обладает рядом особенностей. В частности, оно проводится по правилам логики без каких-либо ссылок на наглядность и опыт.

В основе доказательства лежит **рассуждение** — логическая операция, в результате которой из одного или нескольких взаимосвязанных по смыслу предложений получается предложение, содержащее новое (по отношению к исходным) знание.

В качестве примера рассмотрим рассуждение первоклассника, которому надо установить отношение «меньше» между числами 7 и 8. Учащийся говорит: «$7 < 8$, потому что 7 при счете называют раньше, чем 8».

Выясним, на какие факты опирается вывод, полученный в этом рассуждении.

Таких фактов два:

1. Если число a при счете называют раньше числа b, то $a < b$ (для любых натуральных чисел a и b).

2. 7 при счете называют раньше, чем 8.

Первое предложение носит общий характер, так как содержит квантор общности, подчеркивающий, что предложение имеет место для любых натуральных чисел a и b; его называют **общей посылкой.**

Второе предложение касается конкретных чисел 7 и 8, отражает частный случай, его называют **частной посылкой.**

Из двух посылок и выведен новый факт ($7 < 8$), его называют **заключением.**

Вообще в любом рассуждении есть посылки и есть заключение. Между посылками и заключением существует определенная связь, благодаря которой они и составляют рассуждение.

Рассуждение, между посылками и заключением которого имеет место отношение следования, называют дедуктивным[1].

Другими словами, рассуждение дедуктивно, если с его помощью из истинных посылок нельзя получить ложное заключение. В противном случае рассуждение считается недедуктивным.

Каковы же те условия, при которых рассуждение будет дедуктивным?

Обратимся к примерам.

Пример 1. Дано рассуждение, в котором:

общая посылка: «Если натуральное число кратно 4, то оно кратно 2»;

частная посылка: «Число 12 кратно 4»;

заключение: «Число 12 кратно 2».

В этом рассуждении и посылки, и заключение истинны. Можно предположить, что оно дедуктивное.

Пример 2. Дано рассуждение, в котором:

общая посылка: «Если натуральное число кратно 4, то оно кратно 2»;

частная посылка: «Число 126 кратно 2»;

заключение: «Число 126 кратно 4».

В данном рассуждении посылки истинны, а заключение ложно — число 126 на 4 не делится. Значит, это рассуждение не является дедуктивным, и, следовательно, истинность посылок не единственное условие, обеспечивающее дедуктивность рассуждения.

Что же еще важно для получения истинного заключения?

Сравним проведенные рассуждения. Для этого представим их в символической форме. Если обозначить через A предложение «Натуральное число x кратно 4», а через B — предложение «Натуральное число кратно 2», то общая посылка в обоих рассуждениях будет иметь вид $A \Rightarrow B$. Вторая посылка в примере 1 частная, она получается, если в предложение A вместо x подставить 12. Обозначим ее A (12). Тогда заключение в первом рассуждении можно обозначить B (12). Для другого примера: вторая посылка имеет вид B (126), а заключение A (126).

В соответствии с введенными обозначениями данные рассуждения можно представить в таком виде:

Пример 1	Пример 2
I посылка: $A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$
II посылка: A (12)	B (126)
Заключение: B (12)	A (126)

В первом примере рассуждение проводилось по схеме ($A \Rightarrow B$ и A (12)) $\Rightarrow B$ (12), а во втором: ($A \Rightarrow B$ и B (126)) $\Rightarrow A$ (126). Как видим, схемы рассуждений различны. Схема, которую использовали в первом случае, привела к истинному заключению, а вторая схема рассуждения — к ложному.

[1] Дедуктивный — от лат. слова deductio — выведение.

Рассмотренные примеры позволяют утверждать, что истинность посылок не всегда гарантирует истинность заключения. Необходимо еще рассуждать по таким схемам (правилам), которые обеспечивают такое заключение.

Упражнения

1. В каждом из следующих рассуждений выделите общую посылку, частную посылку и заключение: 1) если треугольник равнобедренный, то углы в нем при основании равны; треугольник ABC равнобедренный, следовательно, углы в нем при основании равны; 2) во всяком равнобедренном треугольнике углы при основании равны; углы при основании треугольника ABC не равны, следовательно, треугольник ABC не является равнобедренным; 3) во всяком равнобедренном треугольнике углы при основании равны; треугольник ABC неравнобедренный, следовательно, углы в нем при основании не равны.

2. Проанализируйте схему каждого рассуждения из упражнения 1. Есть ли среди них недедуктивные рассуждения?

3. Учащимся I класса было предложено обосновать выбор действия при решении задачи: «Катя нашла 5 грибов, а Саша 3 гриба. На сколько больше грибов нашла Катя?»

Один учащийся сделал это так: «В этой задаче надо узнать, на сколько 5 больше чем 3. Поэтому из 5 надо вычесть 3».

Другой учащийся предложил такое обоснование: «Все задачи, в которых требуется узнать, на сколько одно число больше другого, решаются вычитанием. В этой задаче надо узнать, на сколько 5 больше чем 3. Значит, для ответа на вопрос задачи надо из 5 вычесть 3».

Правильны ли проведенные рассуждения? Чем они отличаются?

4. Какая посылка используется неявно в следующем рассуждении младшего школьника: 1) Обосновывается истинность равенства $13 \cdot 5 = 65$. 13 — это сумма чисел 10 и 3; 10 умножить на 5, получится 50, 3 умножить на 5, получится 15; $50 + 15 = 65$. Значит, $13 \cdot 5 = 65$. 2) Обосновывается выбор действия при решении текстовой задачи: «В одной книге 36 страниц, а в другой 18 страниц. Во сколько раз больше страниц в первой книге, чем во второй?»

В задаче надо узнать, во сколько раз 36 больше 18. Для ответа на вопрос задачи надо разделить 36 на 18.

5. Обоснуйте истинность следующих равенств:

1) $17 + 12 = 29$; 2) $18 \cdot 5 = 90$.

14. Простейшие схемы дедуктивных рассуждений

Считают, что в основе каждого дедуктивного рассуждения лежит определенное правило вывода. Мы рассмотрим только три основных таких правила, приняв их без доказательства.

1. **Правило заключения:** $(A \Rightarrow B$ и $A(a)) \Rightarrow B(a)$, где $A \Rightarrow B$ — общая посылка, $A(a)$ — частная посылка, $B(a)$ — заключение.

2. **Правило отрицания:** $(A \Rightarrow B$ и $\overline{B(a)}) \Rightarrow \overline{A(a)}$.

3. **Правило силлогизма:** $(A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

Применение этих правил гарантирует, что рассуждение будет дедуктивным, т. е. позволяет из истинных посылок выводить истинное заключение.

Покажем, как используются данные правила для проверки правильности рассуждения.

З а д а ч а. Являются ли следующие рассуждения дедуктивными:

1) Все числа, запись которых оканчивается нулем, делятся на 5; число не делится на 5, следовательно, его запись не оканчивается нулем.

2) Если натуральное число кратно 8, то оно кратно 4; если натуральное число кратно 4, то оно кратно 2; следовательно, если число кратно 8, то оно кратно 2.

3) Если запись числа оканчивается нулем, то оно делится на 5; число не оканчивается нулем, следовательно, оно не делится на 5.

Р е ш е н и е. 1) Определим схему приведенного рассуждения. Сначала сформулируем общую посылку в виде условного предложения: «Если запись числа оканчивается нулем, то оно делится на 5». Затем обозначим буквой A предложение «Запись числа оканчивается нулем», а буквой B предложение «Число делится на 5». Тогда общая посылка примет вид $A \Rightarrow B$, частная — это B, а заключение — $\overline{A}$, т. е. имеем рассуждение по схеме:

$$(A \Rightarrow B \text{ и } \overline{B}) \Rightarrow \overline{A}.$$

Это правило отрицания, гарантирующее истинность заключения. Следовательно, данное рассуждение дедуктивное.

2) Если обозначить через A предложение «Натуральное число кратно 8», через B предложение «Натуральное число кратно 4», через C предложение «Натуральное число кратно 2», то схема данного рассуждения примет вид:

$$(A \Rightarrow B \text{ и } B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C).$$

Такая схема — это правило силлогизма — гарантирует при истинности посылок истинность заключения. Значит, данное рассуждение дедуктивное.

3) Обозначим буквой A предложение «Запись числа оканчивается нулем», буквой B предложение «Число делится на 5». Тогда схема данного рассуждения будет иметь вид $(A \Rightarrow B$ и $\overline{A}) \Rightarrow \overline{B}$. Она приводит к ложному выводу: например, число 15 не оканчивается нулем, но оно делится на 5. Вообще эта схема рассуждения не гарантирует истинности заключения — она может привести как к истинному, так и к ложному заключению.

Рассуждение по схеме, приводящей в одном случае к истинно-

му заключению, а в другом — к ложному, считают недедуктивным. Следовательно, данное рассуждение недедуктивное.

Целесообразно запомнить две схемы недедуктивных рассуждений: 1) $(A \Rightarrow B$ и $B) \Rightarrow A$; 2) $(A \Rightarrow B$ и $\overline{A}) \Rightarrow \overline{B}$.

Эти схемы не гарантируют истинности заключения при истинности посылок.

Заметим, что полное дедуктивное рассуждение по приведенным схемам требует указания двух посылок. Однако в процессе рассуждений эти схемы иногда сокращают, опуская, например, общую посылку.

В математике давно заметили, что использование схем, не гарантирующих истинность заключения, а также невыполнение условий применимости теорем и формул, применение ошибочного чертежа приводят к неверному выводу, ложному заключению. И математики стали придумывать умышленно неправильные рассуждения, но имеющие видимость правильного. Такие рассуждения получили названия **софизмов.**

Разбор софизмов не только формирует умение правильно рассуждать, но и помогает усваивать многие математические факты.

Рассмотрим пример софизма.

Докажем, что $5=1$.

Из чисел 5 и 1 вычтем одно и то же число 3. Получим $5-3=2$, $1-3=-2$. Возведем числа 2 и -2 в квадрат. Результатом этого явятся равные числа: $2^2=4$, $(-2)^2=4$. Значит, должны быть равны и исходные числа 5 и 1. Итак, $5=1$.

Ясно, что заключение в проведенном рассуждении ложно. Но где допущена ошибка?

Проанализируем проведенное рассуждение. Оно состоит из трех шагов, причем воспроизведенных в сокращенном виде. Мы же восстановим обе посылки каждого шага.

1-й шаг (вычитание из 5 и 1 целого числа 3).

Общая посылка: «Разность любых целых чисел существует».

Частная посылка: «Числа 5, 1 и 3 целые».

Заключение: «Разность $5-3$, $1-3$ существует, и $5-3=2$, $1-3=-2$».

Так как рассуждение велось по правилу заключения, то при истинных посылках мы получили истинное заключение. Поэтому ошибок на этом шаге нет.

2-й шаг (возведение чисел 2 и -2 в квадрат).

Общая посылка: «Квадраты любых целых чисел всегда существуют и являются неотрицательными числами».

Частная посылка: «Числа 2 и -2 целые».

Заключение: «Квадраты чисел 2 и -2 существуют, причем $2^2=4$, $(-2)^2=4$».

Рассуждение здесь также велось по правилу заключения, получили истинный вывод. Поэтому ошибок на этом шаге не допущено.

3-й шаг (заключение о равенстве чисел 5 и 1).

Общая посылка: «Если числа равны, то равны и их квадраты».

Частная посылка: «Квадраты чисел равны $(4=4)$».

Заключение: «Равны и сами числа $5-3=1-3$, или $5=1$».

На этом этапе рассуждение велось по схеме $(A \Rightarrow B$ и $B) \Rightarrow A$, а она не гарантирует истинности заключения. В результате и было получено ложное заключение.

Упражнения

1. Выявите схему каждого рассуждения и укажите среди них дедуктивные: 1) противоположные углы параллелограмма равны; четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм; следовательно, $\angle A = \angle C$; 2) противоположные углы параллелограмма равны; противоположные углы четырехугольника $ABCD$ равны; следовательно, $ABCD$ — параллелограмм; 3) противоположные углы параллелограмма равны; четырехугольник $ABCD$ не является параллелограммом; следовательно, его противоположные углы не равны; 4) противоположные углы параллелограмма равны; противоположные углы четырехугольника $ABCD$ не равны; следовательно, четырехугольник $ABCD$ не является параллелограммом.

2. Закончите рассуждение так, чтобы оно было правильным: 1) если сумма цифр числа делится на 3, то число делится на 3; сумма цифр числа 327 делится на 3, следовательно, ...; 2) если сумма цифр числа делится на 3, то число делится на 3; число m не делится на 3, следовательно, ...; 3) если число делится на 18, то оно делится на 6; если число делится на 6, то оно делится на 3, следовательно, ...

3. Дедуктивны ли следующие рассуждения: 1) все отличники III класса спортсмены. Ученик III класса Сережа — отличник; следовательно, Сережа спортсмен; 2) все отличники III класса спортсмены. Третьеклассник Володя спортом не занимается; следовательно, он не отличник; 3) все отличники III класса спортсмены. Третьеклассница Оля не отличница; следовательно, Оля не спортсменка; 4) все отличники III класса спортсмены. Третьеклассница Таня — спортсменка; следовательно, она отличница?

4. Восстановите общую посылку в каждом из следующих рассуждений: 1) число 12 — натуральное, следовательно, оно положительное; 2) треугольник ABC равносторонний, следовательно, он равнобедренный; 3) число 188 не делится на 9, следовательно, сумма его цифр не делится на 9.

5. Найдите ошибку в каждом из следующих софизмов: 1) Все числа равны между собой. Пусть $a \neq b$. Возьмем тождество $a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ab + a^2$. Имеем $(a-b)^2=(b-a)^2$. Отсюда $a-b=b-a$, или $2a=2b$, а значит, $a=b$. 2) Из двух неравных чисел первое всегда больше второго. Пусть m и n — произвольные числа и $m \neq n$. Имеем $(m-n)^2>0$, т. е. $m^2-2mn+n^2>0$, или $m^2+n^2>2mn$. К обеим частям получившегося неравенства прибавим $-2n^2$.

Получим $m^2-n^2>2mn-2n^2$, или $(m+n)(m-n)>2n(m-n)$. После деления обеих частей на $m-n$ имеем $m+n>2n$, откуда следует, что $m>n$.

15. Неполная индукция

Если в выражение n^2+n+41 вместо n подставлять числа 1, 2, 3, 4 и т. д., то можно заметить, что при $n=1$ значение выражения равно простому числу 43, при $n=2$ значение выражения равно простому числу 47, при $n=3$ значение выражения равно простому числу 53 и т. д.

Опираясь на полученные результаты, можно заключить, что при любом натуральном n значение выражения n^2+n+41 есть простое число.

Известно, что 15 делится на 5, 25 делится на 5, 35 делится на 5, 95 делится на 5. Учитывая это, заключаем, что любое число, запись которого оканчивается цифрой 5, делится на 5.

В рассмотренных рассуждениях мы на основании ряда частных случаев сделали общий вывод. Такие рассуждения называют **неполной индукцией.**

Неполная индукция представляет собой такое рассуждение, при котором на основании того, что некоторые объекты совокупности обладают определенным свойством, делается вывод о том, что этим свойством обладают все объекты этой совокупности.

Выводы, полученные при неполной индукции, могут быть как истинными, так и ложными. Так, вывод о том, что любое число, запись которого оканчивается цифрой 5, делится на 5, истинен. А утверждение «При любом натуральном n значение выражения n^2+n+41 есть простое число» ложно. Действительно, если $n=41$, получаем $41^2+41+41=41^2+2\cdot41=41\cdot(41+2)=41\cdot43$, т. е. значение выражения n^2+n+41 оказывается составным числом.

К выводам, полученным при помощи неполной индукции, надо относиться критически. Эти выводы носят характер предположения, гипотезы, которую следует либо доказать (дедуктивным способом), либо опровергнуть. Таким образом, в процессе познания дедуктивные и индуктивные рассуждения оказываются взаимосвязанными.

Несмотря на то что индуктивные рассуждения не всегда приводят к правильным выводам, роль их в изучении математики и других предметов велика. В ходе индуктивных рассуждений формируется умение видеть общее в конкретных, частных случаях, высказывать догадки.

В начальной школе неполный индуктивный вывод применяется часто. Как правило, все общие закономерности здесь выводятся индуктивным путем. Так обосновываются переместительные законы сложения и умножения, равенства $0+a=a$, $1\cdot a=a$, $a:1=a$, $0\cdot a=0$ и другие закономерности.

Кроме неполного индуктивного вывода, в начальных классах широко используется вывод по аналогии[1], при котором осуществляется перенос знаний с изученного объекта на другой, менее изученный объект. Основой для переноса служат разносторонние знания признаков сходства и различия этих объектов.

Аналогия важна тем, что наводит нас на догадки, предположения. Кроме того, аналогия способствует развитию математической интуиции, она является важным источником ассоциаций, способствующих глубокому усвоению предмета.

Однако нельзя забывать о том, что получаемые по аналогии выводы могут оказаться как истинными, так и ложными. Выводы, полученные по аналогии, должны доказываться дедуктивным способом.

Упражнения

1. Каким числом может быть сумма двух четных чисел? Рассмотрите несколько частных случаев и выскажите предположение. Каким образом можно доказать его истинность?

2. Рассмотрите равенства: $1^2=1$, $3^2=9$, $5^2=25$, $7^2=49$. Выскажите какое-либо заключение относительно квадратов нечетных чисел и укажите возможный способ установления его истинности.

3. Разделите каждое из чисел 3^2, 5^2, 7^2 на 4. Чему в каждом из этих случаев равен остаток? Какое предположение можно высказать на основе полученных результатов? Сколько нечетных чисел нужно было бы возвести в квадрат и разделить на 4, чтобы гарантировать истинность высказанного предположения?

4. Найдите значение выражения n^2-n+11 при $n=1$, 2 и 3. Можно ли на основании полученных ответов утверждать, что значение выражения n^2-n+11 при любом натуральном n есть число простое?

5. Выясните, каким образом учащиеся начальных классов убеждаются в истинности следующих высказываний:

1) $0+a=a$; 2) $1\cdot a=a$; 3) $0\cdot a=0$; 4) $ab=ba$.

6. По аналогии с признаками делимости на 3 и на 9 учащийся сформулировал такой признак делимости на 27:

«Для того чтобы число делилось на 27, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр в записи этого числа делилась на 27». Верен ли вывод, сделанный учащимся?

7. Выполняя деление 96 на 16, учащийся получил частное 10 и обосновал свои действия так: $96:16=90:10+6:6=9+1=10$. Какие теоретические факты ошибочно использовал учащийся?

---

[1] Подробнее об аналогии и других видах рассуждений можно, например, прочитать в книге: Ивин А. А. Искусство правильно мыслить.— М., 1986.

16. Способы доказательства истинности высказываний

Основным способом математических доказательств является дедуктивный вывод. При этом математическое доказательство представляет собой такую цепочку дедуктивных рассуждений, что заключение каждого из них, кроме последнего, является посылкой в одном из последующих рассуждений.

Доказательство истинности утверждения $7<8$ состояло из одного рассуждения, содержащего один шаг.

Рассмотрим примеры доказательств, состоящих из двух и более шагов рассуждений.

Пример 1. Докажем, что каждая диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.

Доказательство. 1. В любом параллелограмме противоположные стороны равны; $ABCD$ — параллелограмм (рис. 9), следовательно, $AB=CD$, $BC=AD$. Рассуждение проведено согласно правилу заключения, значит, полученный вывод истинен.

2. Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны: $AB=CD$, $BC=AD$, сторона AC общая, следовательно, треугольники ABC и ACD равны.

И в этом случае рассуждение велось по правилу заключения, значит, вывод истинен. Теорема доказана.

Заметим, что доказательство теоремы состояло из двух шагов рассуждений, проведенных в полной логической форме с указанием всех посылок. Однако такие доказательства громоздки, и поэтому обычно их ведут в свернутой, сокращенной форме, опуская отдельные посылки в схемах рассуждений.

Например, проведенное нами доказательство в свернутой форме может быть таким: в треугольниках ABC и ACD стороны AB и CD, AD и BC равны как противоположные стороны параллелограмма $ABCD$, сторона AC у них общая, следовательно, треугольники ABC и ACD равные.

Пример 2. Докажем, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Доказательство. Проведем его сначала в свернутой форме. Рассмотрим треугольники AOB и AOD (рис. 10). В них

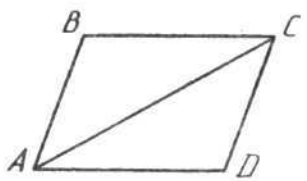


Рис. 9

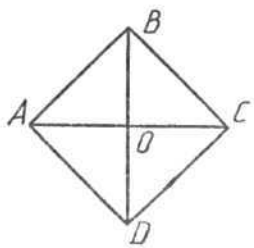


Рис. 10

$AB=AD$ — стороны ромба; $BO=OD$, так как в точке пересечения диагонали ромба делятся пополам; AO — общая сторона. Следовательно, $\triangle AOB=\triangle AOD$.

Из равенства этих треугольников имеем, что $\angle AOB=\angle AOD$, но эти углы смежные. Поэтому углы AOB и AOD прямые, и, следовательно, диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Выполним логический анализ доказательства, т. е. выделим цепочку рассуждений и установим используемое в каждом звене правило вывода.

1. В ромбе все стороны равны; $ABCD$ — ромб, следовательно, $AB=AD$ (правило заключения).

2. В ромбе диагонали делятся в точке пересечения пополам; $ABCD$ — ромб, следовательно, $BO=OD$ (правило заключения).

3. Если три стороны одного треугольника равны соответственно сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны; $AB=AD$, $BO=OD$, сторона AO общая, следовательно, треугольники AOB и AOD равны (правило заключения).

4. Если треугольники равны, то их соответственные углы равны; $\triangle AOB=\triangle AOD$, следовательно, $\angle BOA=\angle AOD$ (правило заключения).

5. Если смежные углы равны, то они прямые; углы AOB и AOD смежные и равные, следовательно, они прямые (правило заключения).

6. Если прямые при пересечении образуют прямые углы, то они перпендикулярны; углы AOB и AOD прямые, следовательно, диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны (правило заключения).

Таким образом, доказательство данного предложения представляет собой цепочку дедуктивных рассуждений, проводимых в каждом случае по правилу заключения, которое обеспечивает истинность выводов. Заключение каждого из рассуждений, кроме последнего, является посылкой в одном из последующих рассуждений.

По способу ведения доказательства подразделяются на **прямые** и **косвенные.** Все рассмотренные ранее доказательства были прямыми: в них, основываясь на каком-либо истинном предложении, строилась цепочка дедуктивных рассуждений, приводившая к истинному заключению.

К прямым доказательствам относится и полная индукция, о которой шла речь в п. 8.

Примером косвенного доказательства является доказательство способом от противного.

Рассмотрим пример такого доказательства. Докажем, что если две различные прямые a и b параллельны третьей прямой c, то они параллельны между собой.

Доказательство. Допустим противное, т. е. что прямые a и b не параллельны между собой. Тогда они пересекутся в некоторой точке P, не принадлежащей прямой c. Так как по условию a параллельна c и b параллельна c, то приходим к тому, что через точку P вне прямой c можно провести две различные прямые, параллельные прямой c. Это высказывание противоречит аксиоме параллельности. Следовательно, наше предположение неверно. Но тогда истинна данная теорема.

Вообще суть доказательства теоремы $A \Rightarrow B$ способом от противного заключается в следующем. Допускают, что заключение теоремы B ложно, следовательно, его отрицание $\overline{B}$ истинно. Присоединив это предложение к совокупности истинных посылок, используемых в процессе доказательства (среди которых находится и условие A), выводят из них следствия до тех пор, пока не получится предложение, противоречащее одной из посылок. Заключая процесс рассуждения, говорят, что полученное противоречие доказывает теорему.

Еще одной формой косвенного доказательства является доказательство, основанное на законе контрапозиции. Суть его в том, что вместо теоремы $A \Rightarrow B$ доказывают равносильную ей теорему вида $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. Если эта теорема оказывается истинной, то истинна и исходная теорема.

Докажем, что если дробь $\frac{a-b}{a+b}$ несократима, то и дробь $\frac{a}{b}$ тоже несократима.

Доказательство. Допустим, что $\frac{a}{b}$ — сократимая дробь. Тогда ее числитель и знаменатель делятся на одно и то же число, например m, т. е. $a = mq$, $b = mp$.

Значит, $\frac{a-b}{a+b} = \frac{mq-mp}{mq+mp} = \frac{m(q-p)}{m(q+p)}$, т. е. дробь $\frac{a-b}{a+b}$ сократима.

Таким образом, доказана истинность предложения: «Если дробь $\frac{a}{b}$ сократима, то будет сократима и дробь $\frac{a-b}{a+b}$». Это предложение представляет собой теорему, обратную противоположной. Значит, по закону контрапозиции будет истинна и исходная теорема.

Упражнения

1. Истинность высказывания «Квадрат любого четного числа делится на 4» может быть доказана следующим образом:

«Квадрат четного числа $2n$ имеет вид $4n^2$, где n — натуральное число.

Так как 4 делится на 4, то и произведение $4n^2$ делится на 4».

Проведите логический анализ этого доказательства.

2. Докажите, что диагональ прямоугольника разбивает его на два равных треугольника. Выполните логический анализ проведенного доказательства.

3. Известно, что в треугольнике MPN угол PMN равен углу PNM. Докажите, что $\angle PMC = \angle PND$ (рис. 11).

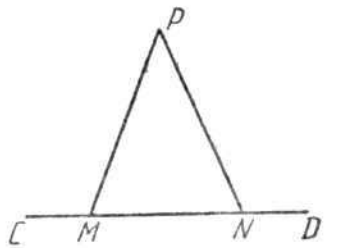


Рис. 11

4. Докажите истинность следующих высказываний: 1) если $a > b$, то $15a > 15b$; 2) если $a > b$, то $-8a < -8b$; 3) если $8 \cdot 3 = 24$, то $3 = 24 : 8$.

5. Обоснуйте правильность рассуждения: «Чтобы найти неизвестный множитель, надо произведение разделить на известный множитель. В уравнении $5x = 30$ неизвестен множитель. Следовательно, $x = 30 : 5$».

6. Докажите способом от противного: 1) если две различные прямые пересекаются, то их пересечение содержит одну и только одну точку; 2) в разностороннем треугольнике биссектриса угла не перпендикулярна противоположной стороне; 3) в разностороннем треугольнике никакие два угла не равны; 4) ни один треугольник не может иметь два прямых угла.

7. Опираясь на определение умножения целых неотрицательных чисел, используемое в начальном курсе математики, докажите, что:

а) $3 \cdot 5 = 15$; б) $0 \cdot 3 = 0$; в) $1 \cdot 5 = 5$.

8. Получив равенства $2+4=6$, $4+6=10$, $6+8=14$, $4+8=12$, учащийся сделал вывод: сумма любых двух четных чисел есть число четное. Верно ли это? Можно ли рассуждения ученика считать доказательством этого утверждения?

§ 4. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ РЕШЕНИЕ

17. Понятие текстовой задачи

В начальном обучении математике велика роль текстовых задач. Решая задачи, учащиеся приобретают новые математические знания, готовятся к практической деятельности. Задачи способствуют развитию их логического мышления. Большое значение имеет решение задач и в воспитании личности учащегося. Поэтому важно, чтобы учитель имел глубокие представления о текстовой задаче, о ее структуре, умел решать такие задачи различными способами.

Текстовая задача есть описание некоторой ситуации (ситуаций) на естественном языке с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации, установить наличие или отсутствие некоторого отношения между ее компонентами или определить вид этого отношения.

Любая текстовая задача состоит из двух частей: *условия* и *требования (вопроса)*.

В условии сообщаются сведения об объектах и некоторых ве-

личинах, характеризующих данные объекты, об известных и неизвестных значениях этих величин, об отношениях между ними.

Требование задачи — это указание того, что нужно найти. Оно может быть выражено предложением в повелительной (Найти площадь прямоугольника) или вопросительной форме (Чему равна площадь прямоугольника?).

Рассмотрим задачу: «На тракторе «Кировец» колхозное поле можно вспахать за 10 дней, а на тракторе «Казахстан» — за 15 дней. На вспашку поставлены оба трактора. За сколько дней будет вспахано это поле?»

Условие этой задачи. «На тракторе «Кировец» колхозное поле можно вспахать за 10 дней, а на тракторе «Казахстан» — за 15 дней. На вспашку поставлены оба трактора». В нем описываются отношения между тремя величинами: объемом работы, производительностью труда и временем выполнения работы, причем в трех различных ситуациях.

Первая ситуация. Некоторый объем работы выполняется только на тракторе «Кировец» с определенной производительностью. Известно значение одной величины, а именно время работы — 10 дней. Значения других величин неизвестны.

Вторая ситуация. Тот же объем работы выполняется только на тракторе «Казахстан» с определенной производительностью. Известно время работы — 15 дней. Значения других величин неизвестны.

Третья ситуация. Тот же объем работы выполняется двумя тракторами с соответствующей каждому производительностью. Значения всех трех величин неизвестны.

Требование (вопрос) задачи: «За сколько дней будет вспахано это поле?» В нем указывается, что нужно найти одно из неизвестных значений величин, а именно время совместной работы. Это же требование может быть сформулировано в повелительной форме: «Найти число дней, которое потребуется для вспашки поля двумя тракторами при совместной работе».

В данной задаче пять неизвестных значений величин, одно из которых заключено в требовании задачи. Это значение величины назовем *искомым*.

Иногда задачи формулируются таким образом, что часть условия или все условие включены в одно предложение с требованием задачи. Например, приведенная выше задача может быть дана в такой формулировке: «На тракторе «Кировец» колхозное поле можно вспахать за 10 дней, а на тракторе «Казахстан» — за 15 дней. За сколько дней можно вспахать это поле, если будут работать оба трактора?» В ней часть условия («будут работать оба трактора») помещена в предложение с требованием задачи. В следующем тексте все условие дается в одном предложении с вопросом: «За сколько дней вспашут поле тракторы «Кировец» и «Казахстан», работая вместе, если на одном из них поле может быть вспахано за 10 дней, а на другом — за 15 дней?»

В реальной жизни довольно часто возникают самые разнообразные задачные ситуации. Сформулированные на их основе задачи могут содержать избыточную информацию, т. е. такую, которая не нужна для выполнения требования задачи. Например, в рассмотренной выше задаче для выполнения ее требования не имеют значения названия марок тракторов. Здесь важно лишь, что в задаче речь идет о двух тракторах с разной производительностью.

В задаче «Девочка нашла 10 белых грибов и 5 подберезовиков, а мальчик 7 белых грибов. Сколько белых грибов нашли дети?» содержится избыточная информация о подберезовиках. Данное «5 подберезовиков» оказывается лишним.

На основе возникающих в жизни задачных ситуаций могут быть сформулированы и задачи, в которых недостаточно информации для выполнения требований. Так, в задаче «Найти длину и ширину участка прямоугольной формы, если известно, что длина больше ширины на 3 м» недостаточно данных для ответа на ее вопрос. Чтобы можно было решить эту задачу, необходимо ее дополнить недостающими данными. Такими данными может быть значение площади или некоторые данные, по которым можно было бы определить одну из искомых сторон.

Одна и та же задача может рассматриваться как задача с избыточными (недостающими) данными и как задача с достаточным числом данных в зависимости от имеющихся у решающего знаний. Например, ученик, не имеющий знаний о дробях и действиях над ними, воспримет приведенную выше задачу о вспашке поля как задачу с недостающей информацией. Решить ее он сможет, если в эту задачу ввести, например, значение площади вспахиваемого поля. При наличии знаний о дробях и действиях с ними ответить на вопрос задачи можно и не зная площади поля.

Упражнения

1. В следующих задачах выделите условие и требование: 1) Два автобуса отправились одновременно из города в пионерский лагерь, расстояние до которого 72 км. Первый автобус прибыл в лагерь на 15 мин раньше второго. С какой скоростью шел каждый автобус, если скорость одного из них на 4 км/ч больше скорости другого? 2) Найдите стороны прямоугольника, если известно, что одна из них на 14 см больше другой, а диагональ его равна 34 см.

2. Приведенные выше задачи сформулируйте таким образом, чтобы предложение, содержащее требование, не содержало элементов условия.

3. В тех же задачах повелительную форму требования замените вопросительной и наоборот.

4. Решите задачи из упражнения 1.

18. Способы решения текстовых задач

Решить задачу — это значит через логически верную последовательность действий и операций с имеющимися в задаче явно или косвенно числами, величинами, отношениями выполнить требование задачи (ответить на ее вопрос).

В качестве основных в математике различают **арифметические** и **алгебраические** способы решения задач. При **арифметическом** способе ответ на вопрос задачи находится в результате выполнения арифметических действий над числами.

Различные арифметические способы решения одной и той же задачи отличаются отношениями между данными, данными и неизвестными, данными и искомым, положенными в основу выбора арифметических действий, или последовательностью использования этих отношений при выборе действий.

Покажем различные арифметические способы решения конкретной задачи.

Задача. За 8 ч рабочий изготавливает 96 одинаковых деталей. Сколько деталей изготовит он за 5 ч работы?

I способ

1) $96:8=12$ (дет.)
2) $12\cdot5=60$ (дет.)

II способ

1) $8:5=1{,}6$ (раза)
2) $96:1{,}6=60$ (дет.)

III способ

8 ч = 480 мин
1) $480:96=5$ (мин)
5 ч = 300 мин
2) $300:5=60$ (дет.)

При **алгебраическом** способе ответ на вопрос задачи находится в результате составления и решения уравнения.

В зависимости от выбора неизвестного (неизвестных) для обозначения буквой (буквами), от хода рассуждений можно составить различные уравнения по одной и той же задаче. В этом случае можно говорить о различных алгебраических решениях этой задачи.

Покажем различные алгебраические решения конкретной задачи.

Задача. Кофейник и две чашки вмещают 740 г воды. В кофейник входит на 380 г воды больше, чем в чашку. Сколько граммов воды вмещает кофейник?

I способ

Пусть x г воды вмещает кофейник, тогда $(x-380)$ г воды вмещает одна чашка, $(x-380)\cdot2$ г воды вмещают две чашки, $(x+(x-380)\cdot2)$ г воды вмещают кофейник и две чашки. Так как 740 г воды вмещают кофейник и две чашки, то можно составить уравнение: $x+(x-380)\cdot2=740$. Решив его, получаем, что $x=500$, т. е. кофейник вмещает 500 г воды.

II способ

Пусть x г воды вмещается в чашку, тогда $(x+380)$ г воды вмещается в кофейник, $2x$ г воды вмещается в две чашки, $((x+380)+2x)$ г воды вмещается в кофейник и две чашки. Так как 740 г воды вмещается в кофейник и две чашки, то можно составить уравнение: $(x+380)+2x=740$. Решив его, получаем, что $x=120$. Чтобы узнать, сколько воды вмещает кофейник, подставим найденное значение x в выражение $x+380$. Тогда $120+380=500$. Значит, кофейник вмещает 500 г воды.

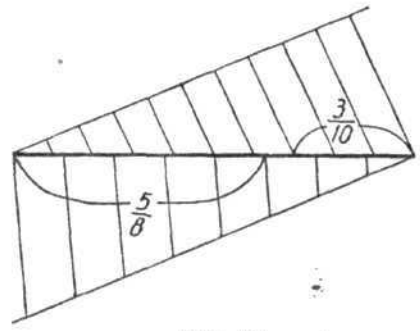


Рис. 12

III способ

Пусть x г воды вмещает кофейник, а y г воды вмещает одна чашка, тогда $2y$ г воды вмещают две чашки, $(x+2y)$ г воды вмещают кофейник и две чашки, $(x-380)$ г воды вмещает одна чашка. Так как $x-380$ есть y, а кофейник и две чашки вмещают 740 г воды, то приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} x-380=y, \\ x+2y=740. \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем $x=500$, $y=120$. Так как в задаче требуется узнать, сколько граммов воды вмещает кофейник, то из полученных данных выбираем требуемое.

Кроме арифметических и алгебраических способов решения текстовых задач, в математике используются и другие способы.

Рассмотрим задачу:

Из двух пунктов навстречу друг другу вышли два пешехода. Первый прошел $\frac{5}{8}$ пути, второй $\frac{3}{10}$. Произошла ли встреча пешеходов?

Изобразим произвольным отрезком расстояние между пунктами (рис. 12). Опираясь на теорему Фалеса, разделим отрезок на 8 и на 10 равных частей.

Опираясь только на чертеж, легко дать ответ на вопрос задачи: «Встреча не произошла». Такой способ решения можно назвать **графическим**.

Иногда решение задачи графическим способом связано не только с построением отрезков, но и с измерением их длин.

Задача. Пионерское звено в один день посадило у школы 3 тополя и 5 берез, а во второй день — тополей столько же, а берез на 2 меньше. Сколько деревьев посадило звено за два дня?

Условимся изображать каждое дерево отрезком в 1 см. Тогда все деревья, посаженные за два дня, можно изобразить в виде отрезка AB (рис. 13).

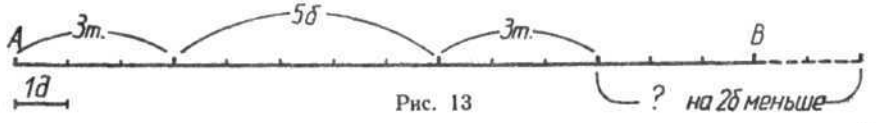


Рис. 13

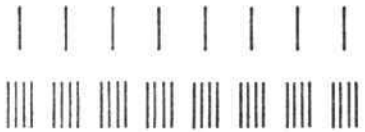


Рис. 14

Измерив отрезок, изображающий все деревья, получим ответ на вопрос задачи: «За два дня пионерское звено посадило 14 деревьев».

Некоторые задачи можно решить, выполняя действия с предметами.

Рассмотрим задачу: «В совхозе 40 автомашин — легковых и грузовых, причем на каждую легковую машину приходится 4 грузовые. Сколько легковых и сколько грузовых машин в совхозе?»

Изобразим каждую машину палочкой (40 машин — 40 палочек). Известно, что на каждую легковую машину приходятся 4 грузовые. Поэтому отложим одну палочку — это легковая машина. Под ней положим 4 палочки — это 4 грузовые машины. Будем поступать так до тех пор, пока все 40 палочек не окажутся разложенными. Чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно сосчитать, сколько палочек положено в верхнем ряду и сколько палочек положено в нижнем ряду (рис. 14).

Такое решение можно назвать **практическим.** Это еще один из способов решения текстовых задач.

Упражнения

1. Решите двумя арифметическими способами следующие задачи:

1) При печатании книги предполагалось уместить на странице 28 строк, по 40 букв в каждой строке. Однако по размерам бумаги оказалось целесообразнее поместить на каждой странице 35 строк. Сколько букв следует помещать в каждой строке, чтобы общее число страниц в книге осталось без изменений?

2) Мотоциклист, двигаясь со скоростью 40 км/ч, проехал некоторое расстояние за 12 мин. За сколько минут проедет это расстояние велосипедист, двигаясь со скоростью 15 км/ч?

2. Решите задачу различными алгебраическими способами:

Из 560 листов бумаги сделали 60 тетрадей двух сортов, затратив на тетради одного сорта по 8 листов, а на тетради другого сорта по 12 листов. Сколько сделали тетрадей того и другого сорта отдельно?

Можно ли решить эту задачу арифметическим способом?

3. Следующие задачи решите, выполнив сначала чертеж:

1) Один кусок проволоки на 54 м длиннее другого. После того как от каждого из кусков отрезали по 12 м, второй кусок оказался в 4 раза короче первого. Найдите первоначальную длину каждого куска проволоки.

2) На полке стоят тарелки. Сначала взяли $\frac{1}{3}$ часть всех тарелок, а потом $\frac{1}{2}$ оставшихся тарелок. После этого на полке осталось 9 тарелок. Сколько тарелок было на полке?

4. Решите графическим способом:

Два мальчика собрали 96 грибов. $\frac{2}{3}$ числа грибов, собранных первым мальчиком, равны $\frac{2}{5}$ числа грибов, собранных вторым мальчиком. Сколько грибов собрал каждый мальчик?

19. Этапы решения задач арифметическими способами. Приемы анализа содержания задачи

Решение текстовой задачи арифметическим способом — это сложная деятельность, содержание которой зависит как от конкретной задачи, так и от умений решающего. Тем не менее в ней можно выделить несколько этапов:

1. Восприятие и анализ содержания задачи.
2. Поиск и составление плана решения задачи.
3. Выполнение плана решения. Формулировка вывода о выполнении требования задачи (ответа на вопрос задачи).
4. Проверка решения и устранение ошибок, если они есть. Формулировка окончательного вывода о выполнении требования задачи или ответа на вопрос задачи.

Следует подчеркнуть, что в реальном процессе решения задачи отмеченные этапы не имеют четких границ и не всегда выполняются одинаково полно. Так, иногда уже при восприятии задачи решающий может обнаружить, что данная задача — известного ему вида и он знает, как ее решать. В этом случае поиск решения не вычленяется в отдельный этап и обоснование каждого шага при выполнении первых трех этапов делает необязательной проверку после выполнения решения. Однако полное, логически завершенное решение обязательно содержит все этапы. А знание возможных приемов выполнения каждого из этапов делает процесс решения любой задачи осознанным и целенаправленным, а значит, и более успешным.

Основная цель первого этапа решения — понимание решающим в целом ситуации, описанной в задаче, понимание условия задачи, ее требования или вопроса, смысла всех терминов и знаков, имеющихся в тексте.

Известно несколько приемов, применение которых способствует пониманию содержания задачи.

Прочитайте, например, такую задачу:

По дороге в одном и том же направлении идут два мальчика. Вначале расстояние между ними было 2 км, но так как скорость идущего впереди мальчика 4 км/ч, а скорость второго 5 км/ч, то второй нагоняет первого. С начала движения до того, как второй мальчик догонит первого, между ними бегает собака со средней скоростью 8 км/ч. От идущего позади мальчика она бежит к идущему впереди, добежав, возвращается обратно

и так бегает до тех пор, пока мальчики не окажутся рядом. Какое расстояние пробежит за все это время собака?

Разобраться в содержании этой задачи, вычленить условие и требование ее можно, если задать специальные вопросы по тексту и ответить на них.

1. О чем эта задача? (Задача о движении двух мальчиков и собаки. Это движение характеризуется для каждого его участника скоростью, временем и пройденным расстоянием.)

2. Что требуется найти в задаче? (В задаче требуется найти расстояние, которое пробежит собака за все это время.)

3. Что обозначают слова «за все это время»? (В задаче говорится, что собака бегает между мальчиками «с начала движения до того, как второй мальчик догонит первого». Поэтому слова «за все это время» означают «за все то время с начала движения, в течение которого второй мальчик догонит первого».)

4. Что в задаче известно о движении каждого из участников его? (В задаче известно, что: 1) мальчики идут в одном направлении; 2) до начала движения расстояние между мальчиками было 2 км; 3) скорость первого мальчика, идущего впереди, 4 км/ч; 4) скорость второго мальчика, идущего позади, 5 км/ч; 5) скорость бега собаки 8 км/ч; 6) время движения всех участников одинаково: это время от начала движения, когда расстояние между мальчиками было 2 км, до момента встречи мальчиков, т. е. до момента, когда расстояние между ними стало 0 км.)

5. Что в задаче неизвестно? (В задаче неизвестно, в течение какого времени второй мальчик догонит первого, т. е. неизвестно время движения всех его участников. Неизвестно также, с какой скоростью происходит сближение мальчиков. И неизвестно расстояние, которое пробежала собака,— это требуется узнать в задаче.)

6. Что является искомым: число, значение величины, вид некоторого отношения? (Искомым является значение величины — расстояния, которое пробежала собака за общее для всех участников время движения.)

Большую помощь в осмыслении содержания задачи и создании основы для поиска решения задачи оказывает **переформулировка текста задачи** — замена данного в нем описания ситуации другим, сохраняющим все отношения, связи и количественные характеристики, но более явно их выражающим. Особенно эффективно использование этого средства в сочетании с разбиением текста на смысловые части.

Направления переформулировки могут быть следующие: отбрасывание несущественной, излишней информации; замена описания некоторых понятий соответствующими терминами и, наоборот, замена некоторых терминов описанием смысла соответствующих понятий; переорганизация текста задачи в форму, удобную для поиска решения. Результатом переформулировки должно быть выделение основных ситуаций. Так, заметив, что

речь в приведенной выше задаче идет о движении, ее можно переформулировать следующим образом:

«Скорость первого мальчика 4 км/ч, а скорость догоняющего его второго мальчика 5 км/ч (первая часть задачи). Расстояние, на которое мальчики сблизились, 2 км (вторая часть). Время ходьбы мальчиков — это время, в течение которого второй мальчик догонит первого, т. е. в течение которого второй мальчик пройдет на 2 км больше, чем первый (третья часть). Скорость бега собаки 8 км/ч. Время бега собаки равно времени ходьбы мальчиков до встречи. Требуется определить расстояние, которое пробежала собака».

Рассмотрим еще такую задачу: «На двух полках книг было на 5 больше, чем на одной из них. Сколько книг было на другой полке?»

После первого прочтения текста кажется, что в задаче недостает информации о книгах на другой полке. Но попробуем переформулировать задачу, раскрыв смысл отношения «на 5 книг больше». Получим следующий текст: «На двух полках книг столько же, сколько на первой полке, и еще 5 книг. Сколько книг на другой полке?» Переформулируем текст еще раз, заменив в нем слова «на двух полках» словами «на первой и второй полках вместе»: «На первой и второй полках вместе книг столько, сколько на первой полке, и еще 5. Сколько книг на второй полке?» Возможно и дальнейшее уточнение: «Количество книг на первой и второй полках вместе — это количество книг на первой полке и еще 5 книг. Сколько книг на второй полке?»

Из этого текста уже ясно, что 5 книг — это и есть книги на другой полке. Таким образом, в данном случае переформулировка привела не только к пониманию содержания задачи, но и (после выполнения несложных логических рассуждений) позволила ответить на вопрос задачи.

Переформулированный текст часто бывает полезно записать схематически. Например, содержание первой задачи после формулировки можно записать в виде такой таблицы:

Скорость	Время	Расстояние
1-й м. 4 км/ч 2-й м. 5 км/ч Соб. 8 км/ч	? ? ? Одинаковое	? ? На 2 км больше ?

Схематическая запись переформулированного текста может иметь и иной вид. Рассмотрим задачу: «Турист проехал 6 ч на поезде со скоростью 56 км/ч. После этого ему осталось ехать в 4 раза больше того, что он проехал. Сколько всего километров он должен был проехать?»

После переформулировки текст может иметь следующий вид:

«Турист ехал 6 ч по 56 км/ч, осталось проехать в 4 раза больше. Требуется узнать весь путь».

Схематическую запись этой задачи можно выполнить так:

Проехал — 6 ч по 56 км/ч
Осталось проехать — ?, в 4 раза больше } ?

В приведенных записях отражены все ситуации, описанные в задаче, данные, известные, искомое и отношения между ними.

Важным средством анализа задачи является чертеж. Например, к последней задаче может быть выполнен такой чертеж (рис. 15):

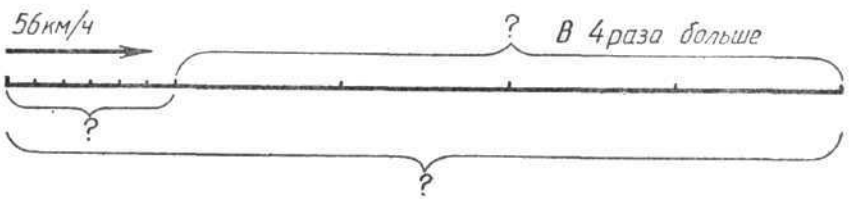


Рис. 15

Он наглядно отражает все связи и зависимости между величинами, что значительно облегчает поиск решения задачи.

Упражнения

1. Проанализируйте содержание нижеприведенных задач, задав специальные вопросы по тексту и ответив на них. Выполните их схематическую запись. Решите задачи:

1) На путь по течению реки теплоход затратил 18 ч. Сколько времени ему потребуется на обратный путь, если собственная скорость теплохода равна 26 км/ч, а скорость течения реки 2 км/ч?

2) Мальчики полили 8 яблонь и 4 сливы и принесли 140 ведер воды. Сколько ведер воды вылили под яблони и сколько под сливы, если на поливку одной яблони уходит воды в 3 раза больше, чем на поливку одной сливы?

3) Утром на току было 96,5 т пшеницы, к полудню на ток доставили пшеницу на трех машинах, по 4,5 т на каждой. Сколько тонн пшеницы осталось на току, когда $\frac{3}{5}$ всей пшеницы отправили на мельницу?

2. Разбейте текст задачи на смысловые части и переформулируйте его, выделив основные ситуации. Решите задачи:

1) Пионеры одной школы собрали 80 т металлолома, другой — $\frac{5}{8}$ этого количества. Из всего собранного лома изготовили рельсы. Сколько получилось метров рельсов, если из каждых 10 т металлолома выходит 70 м рельсов?

2) В ящике 100 кг пшена. После того как из ящика насыпали 2 мешка, в нем осталось 10% всего пшена. Сколько пшена насыпали в каждый мешок, если в один из них насыпали в 2 раза меньше, чем в другой?

3. Выясните, какой способ записи переформулированного текста (краткая запись, таблица, схематический чертеж) наиболее эффективен для определения плана решения задачи:

С аэродрома вылетел вертолет со скоростью 210 км/ч. Через 2 ч с этого же аэродрома вылетел самолет, который через 3 ч после своего вылета перегнал вертолет на 840 км. Найдите скорость самолета.

20. Приемы поиска плана решения задачи и его выполнение

Одним из наиболее распространенных приемов поиска плана решения задачи арифметическими способами является **разбор задачи по тексту** (заданному или переформулированному).

Разбор задачи по тексту задачи проводится в виде цепочки рассуждений, которая может начинаться как от данных задачи, так и от ее вопросов.

При разборе задачи от данных к вопросу нужно выделить в тексте задачи два данных и на основе знания связи между ними (такие знания должны быть получены при выполнении первого этапа решения) определить, какое неизвестное может быть найдено по этим данным и с помощью какого арифметического действия. Считая это неизвестное данным, надо вновь выделить два взаимосвязанных данных, определить неизвестное, которое может быть найдено по ним, а также соответствующее арифметическое действие и т. д., пока не будет выяснено действие, выполнение которого приводит к получению искомого.

Проведем такой разбор по тексту задачи, рассмотренной в п. 19: «Турист ехал 6 ч по 56 км/ч. Осталось проехать в 4 раза больше, чем проехал. Требуется узнать весь путь».

Рассуждения ведем от данных к вопросу: «Известно, что турист ехал 6 ч по 56 км/ч. По этим данным можно узнать расстояние, которое проехал турист за 6 ч. Для этого достаточно скорость умножить на время. Зная пройденное расстояние и то, что оставшееся расстояние в 4 раза больше, можно найти, чему равно оставшееся расстояние. Для этого пройденное расстояние нужно умножить на 4 (увеличить в 4 раза). Зная, сколько километров турист проехал и сколько ему осталось ехать, можем найти весь путь, выполнив сложение найденных отрезков пути. Итак, первым действием будем находить расстояние, которое турист проехал на поезде; вторым действием — расстояние, которое ему осталось проехать; третьим — весь путь».

При разборе задачи от вопроса к данным нужно обратить внимание на вопрос задачи и установить (на основе информации, полученной при анализе текста задачи), что достаточно узнать

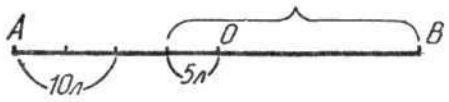


Рис. 16

для ответа на вопрос задачи. Обратиться к условию и выяснить, есть ли для этого необходимые данные. Если таких данных нет или есть только одно данное, то установить, что нужно знать, чтобы найти недостающее данное (недостающие данные), и т. д. Потом составляется план. Рассуждения при этом проводятся в обратном порядке.

Проведем такой разбор той же задачи, строя цепочку рассуждений от вопроса к данным:

«В задаче требуется узнать весь путь. Мы установили, что весь путь состоит из двух частей. Значит, для выполнения требования задачи достаточно знать, сколько километров турист проехал и сколько километров осталось проехать. И то и другое неизвестно. Чтобы найти пройденный путь, достаточно знать время и скорость, с которой ехал турист. Это в задаче известно. Умножив скорость на время, узнаем пройденный путь. Оставшийся путь можно найти, увеличив пройденный путь в 4 раза (умножив на 4). Итак, вначале можно узнать пройденный путь, затем оставшийся, после чего сложением найти весь путь».

Поиск решения задачи может проводиться по чертежу и по **схематической записи,** составленным на первом этапе.

Покажем, как можно осуществить поиск решения по чертежу. Рассмотрим задачу: «В бидоне было молоко. Сначала из него отлили половину и еще 5 л, а затем $\frac{1}{3}$ оставшегося молока. После этого в бидоне осталось 10 л. Сколько литров молока было в бидоне?»

Пусть отрезок AB (рис. 16) изображает искомое. По чертежу видно, что этот отрезок разделен на две равные части: $AO = OB$. Отрезок AO состоит из нескольких частей. Причем видно, что отрезок, изображающий 10 л, содержит две из трех равных частей. Тогда один из них будет обозначать (10:2) л, т. е. 5 л. Теперь видно, что эта половина всего отрезка состоит из четырех равных частей, каждая из которых изображает 5 л. Тогда для ответа на вопрос задачи достаточно умножить 5 на 4 и на 2. Выполняя намеченный план, получим $10:2=5$ (л), $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$ (л).

План решения следующей задачи легко отыскивается после записи текста задачи при помощи таблицы.

З а д а ч а. Сколько деталей получится из 36 кг металла, если из 12 кг получается 8 деталей?

Масса 1 детали	Количество деталей	Масса всех деталей
Одинаковая	8	12 кг
	?	36 кг

В графы таблицы занесены значения трех величин. По известным значениям двух из них, записанных в первой строке, можно найти значение третьей величины, т. е. массу одной детали. В результате во второй строке появляются значения двух величин, по которым можно найти искомое количество деталей.

Третьим этапом решения является реализация намеченного плана. Выполнение плана может проводиться как в устной форме, так и в письменной. Известны следующие формы записи решения задачи.

I. С о с т а в л е н и е п о у с л о в и ю з а д а ч и в ы р а ж е н и я. Запись решения в этой форме осуществляется поэтапно. Сначала записываются отдельные шаги, приводящие в итоге к выражению, после чего находится значение выражения и запись приобретает вид равенства, в левой части которого — выражение, составленное по условию задачи, а в правой — его значение, оно-то и позволяет сделать вывод о выполнении требования задачи (дать ответ на вопрос задачи).

Ниже показаны образцы записей в этой форме:

$56 \cdot 6$ (км) — расстояние, которое проехал турист на поезде за 6 ч.

$56 \cdot 6 \cdot 4$ (км) — путь, который осталось проехать туристу.

$56 \cdot 6 + 56 \cdot 6 \cdot 4$ (км) — должен был проехать турист.

$56 \cdot 6 + 56 \cdot 6 \cdot 4 = 1680$ (км).

О т в е т: 1680 км.

Пояснения к действиям можно не записывать, а давать их в устной форме. Тогда запись решения примет вид:

$$56 \cdot 6 + 56 \cdot 6 \cdot 4 = 1680 \text{ (км)}.$$

О т в е т: 1680 км.

II. З а п и с ь п о д е й с т в и я м с п о я с н е н и е м к к а ж д о м у в ы п о л н е н н о м у д е й с т в и ю. Например:

$56 \cdot 6 = 336$ (км) — турист проехал на поезде за 6 ч.

$336 \cdot 4 = 1344$ (км) — осталось проехать туристу.

$336 + 1344 = 1680$ (км) — должен был проехать турист.

Если пояснения даются в устной форме, то запись решения будет следующей:

$56 \cdot 6 = 336$ (км)
$336 \cdot 4 = 1344$ (км)
$336 + 1344 = 1680$ (км)

О т в е т: 1680 км.

III. З а п и с ь к а ж д о г о п у н к т а п л а н а с с о о т в е т с т в у ю щ и м и а р и ф м е т и ч е с к и м и д е й с т в и я м и. Найдем расстояние, которое проехал турист за 6 ч:

$56 \cdot 6 = 336$ (км).

Найдем расстояние, которое осталось проехать туристу:

$336 \cdot 4 = 1344$ (км).

Найдем расстояние, которое должен был проехать турист:

$336 + 1344 = 1680$ (км).

Ответ: 1680 км.

IV. Запись вопросов и соответствующих действий.

1) Сколько километров проехал турист на поезде?

$56 \cdot 6 = 336$ (км).

2) Сколько километров осталось проехать туристу?

$336 \cdot 4 = 1344$ (км).

3) Сколько километров турист должен был проехать?

$336 + 1344 = 1680$ (км).

Ответ: 1680 км.

Упражнения

1. Проанализируйте содержание задачи, проведите ее разбор и запишите решение в форме вопросов и соответствующих действий:

«Капитан теплохода получил задание пройти 540 км за 16 ч. 180 км теплоход проплыл со скоростью 30 км/ч. С какой скоростью теплоход должен проплыть остальное расстояние, чтобы выполнить задание в положенное время?»

2. Найдите два арифметических способа решения задачи, запишите одно решение по действиям, а другое — составив выражение:

«Из поселка в город, до которого 27 км, выехал велосипедист. Проехав $\frac{1}{3}$ пути, он вернулся в поселок, пробыл там полчаса и после этого снова поехал в город. Сколько времени затратил велосипедист, пока доехал до города, если скорость движения была равна 15 км/ч?»

Можно ли решить эту задачу алгебраическим способом?

3. Решите задачу арифметическим способом:

«На крыше дома сидело несколько голубей. Когда на крышу село еще 15 голубей, а улетело 18 голубей, то на крыше осталось 16 голубей. Сколько голубей было на крыше первоначально?»

Решение запишите по действиям с пояснением к каждому выполняемому действию.

4. Дана задача: «Два плотника заработали вместе 140 р. Один из них работал 14 дней по 7 часов в день, а другой — 7 дней по 6 часов. Сколько денег заработал каждый плотник, если почасовая оплата была одинакова?»

1) Запишите кратко условие задачи.

2) Выясните, какой способ разбора данной задачи является наиболее целесообразным.

3) Решите задачу арифметическим способом.

5. Какой способ разбора данной задачи наиболее целесообразен:

«В одном бидоне 36 л молока. Когда из него перелили в другой 4 л, то в бидонах молока стало поровну. Сколько литров молока было в другом бидоне?»

6. Дана задача: «Два велосипедиста выехали навстречу друг другу из двух поселков, расстояние между которыми 76 км. Через 2 ч они встретились. Какова скорость каждого велосипедиста, если известно, что скорость одного из них на 3 км/ч меньше другого?»

Сравните разные способы ее решения.

I Способ	*II способ*
1) $76:2=38$ (км)	1) $3 \cdot 2=6$ (км)
2) $38-3=35$ (км/ч)	2) $76-6=70$ (км)
3) $35:2=17{,}5$ (км/ч)	3) $70:2=35$ (км)
4) $17{,}5+3=20{,}5$ (км/ч)	4) $35:2=17{,}5$ (км/ч)
	5) $17{,}5+3=20{,}5$ (км/ч)

При каком способе рассуждения проще?

21. Приемы проверки решения задачи

Проверка включается в завершающий этап решения, в результате которого устанавливается правильность или ошибочность выполненного решения.

При проверке на основе ряда умственных или практических действий должен быть сделан вывод в виде рассуждения: «Так как..., то задача решена верно (неверно)».

Известно несколько приемов, помогающих установить, верно ли решена задача.

1. Прикидка. Суть этого приема заключается в прогнозировании с некоторой степенью точности правильности результата решения. Применение прикидки дает точный ответ на вопрос «Правильно ли решена задача?» лишь в том случае, если полученный при решении результат не соответствует прогнозируемому.

Покажем, как проводятся рассуждения при использовании этого приема в ходе проверки решения следующей задачи:

«В одном куске 5 м ткани, в другом 7 м такой же ткани. Сколько стоит каждый кусок, если за оба куска уплатили 36 р.?»

Вначале на основе анализа содержания задачи устанавливаем, что стоимость каждого куска ткани меньше чем 36 р. и второй кусок дороже первого. Выполнив решение $5+7=12$ (м), $36:12=3$ (р.), $3 \cdot 5=15$ (р.), $3 \cdot 7=21$ (р.), устанавливаем, что действительно каждый кусок стоит меньше чем 36 р. и второй кусок дороже первого. Полученный результат соответствует прогнозируемому, по-видимому, задача решена верно.

Предположим, что в результате решения этой задачи полу-

чили: первый кусок стоит 25 р., а второй — 21 р. Сравнивая эти результаты с прогнозируемыми, получаем, что каждый кусок стоит дешевле 36 р., но второй кусок дешевле первого, а должен быть дороже. Значит, в решении где-то допущена ошибка и результат найден неверно. Для обнаружения ошибки сначала проверяются вычисления. Если в вычислениях ошибка не обнаружена, то можно провести решение заново. Можно, соотнося каждое действие с условием задачи и определив его смысл, проверить, правильно ли выбраны действия.

2. Соотнесение полученного результата и условия задачи. Суть данного приема заключается в том, что найденный результат вводится в текст задачи и на основе рассуждений устанавливается, не возникает ли при этом противоречия.

Пусть при решении задачи: «Для посадки привезли 600 лип и 400 дубов. Их рассадили в ряды поровну. При этом лип получилось на 5 рядов больше, чем дубов. Сколько получилось рядов лип и дубов в отдельности?» — получено, что дубов посадили 10 рядов, а лип — 15 рядов.

Прочтем текст задачи, заменив в нем вопрос ответом на него: «Для посадки привезли 600 лип и 400 дубов. Их рассадили в ряды поровну. При этом лип получилось на 5 рядов больше, чем дубов. Лип получилось 15 рядов, а дубов — 10 рядов».

Установим, нет ли в этом тексте противоречия. Рассуждаем, например, так. В условии сказано: «Получилось лип на 5 рядов больше, чем дубов». Сравним полученное число рядов лип с числом рядов дубов. Рядов лип — 15, рядов дубов — 10. 15 больше чем 10 на 5. Значит, это отношение выполняется.

Проверим другое отношение, имеющееся в задаче: условие равенства числа деревьев в каждом ряду. Для этого найдем число лип в одном ряду и число дубов в одном ряду: $600:15=40$; $400:10=40$. Это отношение тоже выполняется.

Проверены все отношения, имеющиеся в задаче, и установлено, что противоречия нет. Значит, задача решена верно.

3. Решение задачи различными способами. Пусть при решении задачи каким-либо способом получен некоторый результат. Если ее решение другим способом приводит к тому же результату, то можно сделать вывод о том, что задача решена была верно.

Поясним сказанное на конкретном примере. Рассмотрим задачу: «Из пункта A вышла грузовая машина со скоростью 60 км/ч. Через 2 ч вслед за ней из A вышла легковая машина со скоростью 90 км/ч. На каком расстоянии от A легковая машина догонит грузовую?»

Пусть решение данной задачи было осуществлено арифметическим способом:

$$90-60=30 \text{ (км/ч)}$$
$$60\cdot 2=120 \text{ (км)}$$

$$120:30=4 \text{ (ч)}$$
$$90\cdot 4=360 \text{ (км)}$$

Ответ: легковая машина догонит грузовую на расстоянии 360 км от пункта A.

Чтобы проверить правильность полученного результата, можно решить эту задачу алгебраическим способом, т. е. составить уравнение $x\cdot 90=(x-2)\cdot 60$, где x ч — время движения легковой машины. Результат оказывается таким же, что и при арифметическом решении. Значит, данная задача и арифметическим способом решена верно.

Заметим, что если задача решена первоначально арифметическим способом, то правильность ее решения можно проверить не только решив эту задачу методом составления уравнения. Способом проверки в этом случае может быть и ее графическое решение, а также решение арифметическим способом, отличным от первого.

Не следует также думать, что без проверки нет решения текстовой задачи. Правильность решения обеспечивается прежде всего четкими и логичными рассуждениями и на всех других этапах работы над задачей.

Упражнения

1. Решите задачу и выполните проверку способом установления соответствия результата условию задачи:

1) Спортсмен метнул копье в 5 раз, или на 48 м, дальше, чем толкнул ядро. Сколько метров пролетело копье и сколько ядро?

2) Двое рабочих различной квалификации выполнили совместно некоторую работу за 6 дней. Производительность первого рабочего на 20% больше производительности второго. За какое время второй рабочий мог бы выполнить всю работу?

2. Решите задачу различными способами:

1) Двигаясь со скоростью 60 км/ч, автомобиль пройдет расстояние от пункта A до пункта B за 3 ч 15 мин. За какое время пройдет автомобиль то же расстояние, если увеличит скорость на 15 км/ч?

2) За 4,5 м ткани заплатили 18 р. Сколько стоят 27 м такой же ткани?

22. Решение задач алгебраическими способами

При решении любой задачи алгебраическим способом после анализа содержания задачи выбирается неизвестное, обозначается буквой, вводится в текст задачи, а затем на основе выделенных в содержании задачи зависимостей составляются два выражения, связанные отношением равенства, что позволяет записать соответствующее уравнение. Найденные в результате решения уравнения

корни осмысливаются с точки зрения содержания задачи, а корни, не соответствующие условию задачи, отбрасываются. Если буквой обозначено искомое, оставшиеся корни могут сразу дать ответ на вопрос задачи. Если буквой обозначено неизвестное, не являющееся искомым, то искомое находится на основе взаимосвязи его с тем неизвестным, которое было обозначено буквой.

Покажем все этапы решения алгебраическим способом на примере следующей задачи: «Огородный участок, имеющий форму прямоугольника, одна сторона которого на 10 м больше другой, требуется обнести изгородью. Определите длину изгороди, если известно, что площадь участка равна 1200 м^2».

Анализ содержания задачи и приемы его выполнения при алгебраическом способе решения существенно не отличаются от соответствующих приемов при арифметическом решении, поэтому приведем лишь результаты такого анализа.

В задаче рассматривается участок прямоугольной формы. Известно, что одна его сторона на 10 м больше другой, а площадь равна 1200 м^2. Требуется определить периметр этого прямоугольного участка.

Периметр прямоугольника можно найти, если будут известны длины его сторон. Поэтому обозначим через x м длину одной стороны. Тогда $(x+10)$ м — длина другой его стороны. Так как площадь прямоугольника можно выразить через длины его сторон, то получаем уравнение $x\cdot(x+10)=1200$. Решим его:

$$x^2+10x=1200,$$
$$x^2+10x-1200=0,$$
$$x=-5\pm\sqrt{25+1200}=-5\pm35,$$
$$x_1=30,\quad x_2=-40.$$

По смыслу задачи значение x (длина стороны) должно быть положительным числом. Этому условию удовлетворяет только первый корень. Значит, длина одной стороны прямоугольного участка равна 30 м, другой — 40 м $(30+10=40)$, а периметр равен $2\cdot30+2\cdot40=140$ (м).

Проверку можно выполнить, соотнеся найденный результат с условием задачи. Для этого введем в текст задачи найденный результат: «Огородный участок, имеющий форму прямоугольника, одна сторона которого равна 30 м, а другая на 10 м больше, требуется обнести изгородью. Длина изгороди 140 м, а площадь равна 1200 м^2».

Проверим, не возникает ли из сказанного в тексте какое-либо противоречие. Так как длина одной стороны прямоугольника 30 м, а его периметр равен 140 м, то длина другой его стороны составляет $(140-2\cdot30):2=40$ (м), т. е. на 10 м больше первой. Кроме того, зная длины сторон, можно найти площадь прямоугольника: $30\cdot40=1200$ м^2. Как видим, полученный текст не

содержит противоречий. Значит, найденный результат удовлетворяет условию задачи.

Проверку можно выполнить иначе, решив задачу другим способом.

Упражнения

1. Решите задачу различными алгебраическими способами:

1) От деревни до совхоза 20 км, а от совхоза до станции 40 км. Из совхоза по направлению к станции выехал велосипедист со скоростью 12 км/ч. Одновременно из деревни на станцию через совхоз по той же дороге отправился мотоциклист. С какой скоростью должен ехать мотоциклист, чтобы догнать велосипедиста до его приезда на станцию?

2) Периметр прямоугольника равен 60 см. Если длину увеличить на 10 см, а ширину уменьшить на 6 см, то площадь прямоугольника уменьшится на 32 см^2. Найдите площадь прямоугольника.

2. Решите задачу алгебраическим способом и проверьте ее, решив арифметическим способом:

1) Колхоз отвел под гречиху и овес 700 га, причем площадь, отведенная под овес, была на 60 га больше площади, отведенной под гречиху. Сколько гектаров было отведено под овес и сколько под гречиху?

2) В двух кусках одинаковое количество ткани. После того как от одного отрезали 18 м, а от другого отрезали 25 м, в первом куске осталось вдвое больше ткани, чем во втором. Сколько метров ткани в каждом куске?

3) Из пункта A выехал велосипедист. Одновременно вслед за ним из пункта B, отстоящего от A на расстоянии 20 км, выехал мотоциклист. Велосипедист ехал со скоростью 12 км/ч, а мотоциклист со скоростью 16 км/ч. На каком расстоянии от пункта A мотоциклист догонит велосипедиста?

§ 5. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

23. Понятия множества и элемента множества

В математике часто приходится рассматривать те или иные группы объектов как единое целое: числа от 1 до 10, натуральные числа, однозначные числа, треугольники, квадраты и т. д. Все эти различные совокупности называют множествами.

Понятие множества является одним из основных понятий математики и поэтому не определяется через другие. Его можно пояснить на примерах. Так, можно говорить о множестве учащихся некоторого класса, о множестве гласных букв русского алфавита, о множестве натуральных чисел.

Математический смысл слова «множество» отличается от того,

как оно используется в обыденной речи, где его связывают с большим числом предметов. В математике этого не требуется. Здесь рассматривают множество, состоящее из одного объекта, и множество, не содержащее ни одного объекта.

В некоторых случаях множества обозначают буквами латинского алфавита: A, B, C, ..., Z. Множество, не содержащее ни одного объекта, называют **пустым** и обозначают знаком $\varnothing$.

Объекты, из которых образовано множество, называют его **элементами.** Элементы множества принято обозначать строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, ..., z.

В математике и других науках нередко приходится выяснять, принадлежит какой-либо объект рассматриваемому множеству или не принадлежит. Например, мы говорим, что число 5 натуральное. Другими словами, мы утверждаем, что число 5 принадлежит множеству натуральных чисел. Или, например, говорим, что число 0,75 не является натуральным. Это означает, что число 0,75 не принадлежит множеству натуральных чисел.

Предложение вида *«Объект a принадлежит множеству A»* можно записать, используя символы: $a \in A$. Прочитать его можно по-разному:

Объект a принадлежит множеству A.

Объект a — элемент множества A.

Множество A содержит элемент a.

Предложение *«Объект a не принадлежит множеству A»* можно записать так: $a \notin A$. Его читают:

Объект a не принадлежит множеству A.

Объект a не является элементом множества A.

Множество A не содержит элемента a.

Пусть A — множество однозначных чисел. Тогда предложение «$3 \in A$» можно прочитать: «Число 3 однозначное», а запись «$12 \notin A$» означает; «Число 12 не является однозначным».

Множества бывают конечные и бесконечные. Так, множество дней недели конечно, а множество точек на прямой бесконечно. Бесконечными являются и такие множества, как множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел, множество действительных чисел. Для этих множеств в математике приняты специальные обозначения: буковой $\boldsymbol{N}$ обозначают множество натуральных чисел, $\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел, $\boldsymbol{Q}$ — множество рациональных чисел, $\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел.

Упражнения

1. Назовите три элемента множества: 1) предметов, изучаемых в педагогическом училище; 2) звонких согласных букв русского алфавита; 3) натуральных чисел.

2. Прочитайте различными способами предложения: 1) $12 \in X$; 2) $-3 \notin X$.

3. B — множество четных чисел. Зная это, запишите с помощью символов следующие предложения: 1) число 20 четное; 2) число 17 не является четным.

4. Прочитайте следующие высказывания и укажите среди них истинные: 1) $100 \in \boldsymbol{N}$; 2) $-8 \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-8 \notin \boldsymbol{N}$; 4) $5{,}36 \in \boldsymbol{Q}$; 5) $102 \notin \boldsymbol{R}$; 6) $\sqrt{2} \in \boldsymbol{Q}$; 7) $-7 \in \boldsymbol{R}$; 8) $\frac{3}{4} \in \boldsymbol{N}$; 9) $0 \in \boldsymbol{Z}$.

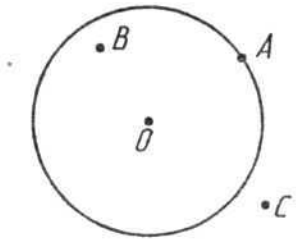


Рис. 17

5. P — множество натуральных чисел, больших 7 и меньших 14. Выясните, принадлежат или не принадлежат этому множеству числа 13, 10, 5, 7, 14. Ответ запишите, используя знаки $\in$ и $\notin$.



Рис. 18

6. D — множество целых отрицательных чисел. Назовите пять чисел, принадлежащих этому множеству. Верно ли, что $-1 \in D$; $0 \notin D$; $-3{,}2 \in D$?

7. Даны числа: 325; 0; -17; $-3{,}8$; 7. Установите, какие из них принадлежат множеству: 1) натуральных чисел; 2) целых чисел; 3) рациональных чисел; 4) действительных чисел.

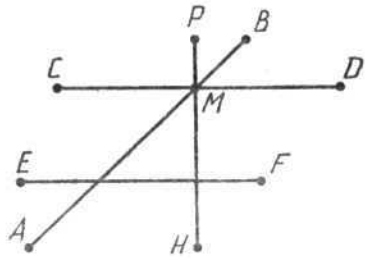


Рис. 19

8. M — множество точек окружности, изображенной на рисунке 17. Прочитайте следующие предложения и укажите среди них верные: 1) $A \in M$; 2) $O \in M$; 3) $B \in M$; 4) $C \notin M$.

9. Измените условие задачи 8 так, чтобы все высказывания были верными.

10. Запишите множество отрезков, которым принадлежит точка C (рис. 18).

11. Запишите с помощью знаков $\in$ и $\notin$, какие из отрезков AB, CD, EF и PH проходят через точку M, а какие через нее не проходят (рис. 19).

24. Способы задания множеств

Понятие множества мы используем без определения. Но как узнавать, является та или иная совокупность множеством или не является?

Считают, что множество определяется своими элементами, **т. е. множество задано, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству либо не принадлежит.**

Множество можно задать, **перечислив все его элементы.** Например, если мы скажем, что множество A состоит из чисел 3, 4,

5 и 6, то мы зададим это множество, поскольку все его элементы окажутся перечисленными. При этом возможна запись $A=\{3, 4, 5, 6\}$, в которой перечисляемые элементы заключаются в фигурные скобки.

Однако если множество бесконечно, то его элементы перечислить нельзя. Трудно задать таким способом и конечное множество с большим числом элементов. В таких случаях применяют другой способ задания множеств: **указывают характеристическое свойство его элементов.**

Характеристическое свойство — это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит.

Рассмотрим, например, множество A двузначных чисел. Свойство, которым обладает любой элемент данного множества,— «быть двузначным числом». Это характеристическое свойство дает возможность решить вопрос о том, принадлежит какой-либо объект множеству A или не принадлежит. Так, число 21 содержится в множестве A, поскольку оно двузначное, а число 145 множеству A не принадлежит — оно не является двузначным.

Случается, что одно и то же множество можно задать, указав различные характеристические свойства его элементов. Например, множество квадратов можно задать как множество прямоугольников с равными сторонами и как множество ромбов с прямыми углами.

Итак, для того чтобы задать некоторое множество, достаточно либо перечислить все его элементы, либо указать характеристическое свойство его элементов. Второй способ более общий: он позволяет задавать и конечные и бесконечные множества в отличие от первого способа, который, как правило, может быть использован для задания конечных множеств с небольшим числом элементов. Иногда этот, первый способ используется и для задания бесконечных множеств. Например, множество N натуральных чисел может быть задано в виде $N=\{1, 2, 3, \ldots\}$. Однако такой способ записи возможен лишь тогда, когда по записанной части множества ясно, что означает многоточие.

Следует заметить, что в ряде случаев одно и то же множество может быть задано и первым и вторым способом. Например, множество B натуральных чисел, меньших 7, заданное посредством указания характеристического свойства его элементов, можно задать и так: $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, т. е. перечислив все его элементы.

В начальном курсе математики понятия множества и элемента множества в явном виде не изучаются, но в силу их большой общности они, по существу, пронизывают всю начальную математику. Так, при выполнении задания «Запишите числа, которые больше чем 65 и меньше чем 75» учащиеся встречаются с двумя способами задания одной и той же совокупности чисел.

Один способ — указано свойство чисел «быть больше чем 65 и меньше чем 75», другой — числа этой совокупности перечисляются: 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74. Смысл упражнения — перейти от одного способа задания множества к другому.

Аналогичные задачи приходится решать младшим школьникам и на других уроках, в частности на уроках русского языка: «Назовите все согласные буквы русского алфавита», «Подчеркните в данном упражнении все существительные», «Выпишите из текста все прилагательные» и т. д.

Упражнения

1. Запишите с помощью знака равенства и фигурных скобок предложения: 1) X — множество чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5; 2) Y — множество букв в слове «математика».

2. Множество C состоит из квадрата, круга и треугольника. Принадлежит ли этому множеству диагональ квадрата?

3. Перечислите элементы следующих множеств:

A — множество нечетных однозначных чисел;

B — множество натуральных чисел, не меньших 5;

C — множество двузначных чисел, делящихся на 10.

4. Укажите характеристическое свойство элементов множества:

1) {а, е, ё, и, о, у, э, ю, я, ы};

2) {23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15};

3) {11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99}.

5. Изобразите на координатной прямой множество решений неравенства (x — действительное число): 1) $x>5{,}3$; 2) $x\leqslant -3{,}8$; 3) $-4{,}5\leqslant x<4$; 4) $2{,}7\leqslant x\leqslant 9$.

6. Выясните, множество решений какого неравенства изображено на координатной прямой в каждом случае (рис. 20).

7. Найдите множество действительных корней уравнения:

1) $3x=x+8$; 3) $3x+5=3(x+1)$;

2) $3(5x+10)=30+15x$; 4) $x(x+16)=0$.

8. A — множество двузначных чисел, запись которых оканчивается цифрой 1. Принадлежат ли этому множеству числа 28, 31, 321, 61?

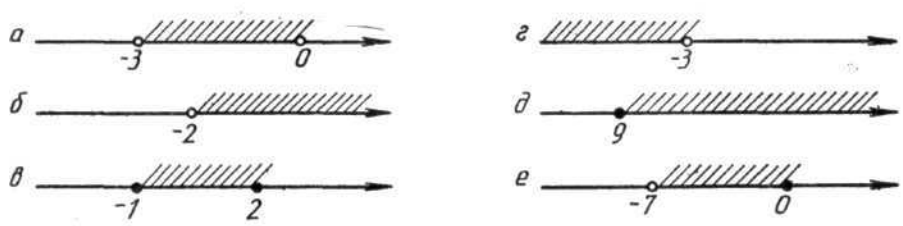


Рис. 20

25. Отношения между множествами

Даны два множества: $A=\{a, b, c, d, e\}$ и $B=\{b, d, k, e\}$. Видим, что элементы b и d принадлежат одновременно множеству A и множеству B. Говорят, что b и d — **общие элементы** множеств A и B, а сами множества **пересекаются.**

Если множества не имеют общих элементов, то говорят, что **они не пересекаются.**

Рассмотрим теперь множества $A=\{a, b, c, d, e\}$ и $B=\{c, d, e\}$. Они пересекаются, и, кроме того, каждый элемент множества B является элементом множества A. В этом случае говорят, что множество B включено в A или что множество B является **подмножеством** множества A.

Определение. **Множество B называется подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является также элементом множества A.**

Если B — подмножество множества A, то пишут: $B\subset A$ — и читают: «B — подмножество A». «B включается в A».

Считают, что пустое множество является подмножеством любого множества, т. е. $\varnothing\subset A$, и что любое множество является подмножеством самого себя, т. е. $A\subset A$. Поэтому среди всех подмножеств заданного множества A должно быть обязательно пустое множество и само множество A.

Выпишем, например, все подмножества множества $A=\{2, 3, 4\}$. Среди них будут одноэлементные подмножества: $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, двухэлементные: $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, а также само множество A: $\{2, 3, 4\}$ и $\varnothing$. Таким образом, данное множество A имеет 8 подмножеств.

Обратимся теперь к множествам $A=\{a, b, c, d, e\}$ и $B=\{c, a, b, e, d\}$. Они пересекаются, и каждый элемент множества A является элементом множества B, т. е. $A\subset B$, и, наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A, т. е. $B\subset A$. В этом случае говорят, что множества A и B **равны.**

Определение. **Множества A и B называются равными, если $A\subset B$ и $B\subset A$.**

Если множества A и B равны, то пишут: $A=B$.

Из определения вытекает, что равные множества состоят из одних и тех же элементов и что порядок записи элементов множества не существен.

Наглядно отношения между множествами изображают при помощи особых чертежей, называемых кругами Эйлера[1]. Для этого множества, сколько бы они ни содержали элементов, представляют при помощи кругов, овалов или любых других геометрических фигур.

[1] Леонард Эйлер (1707—1783) — член Петербургской академии наук. Л. Эйлер родился в Швейцарии. В 1727 году по приглашению Петербургской академии наук приехал в Россию, где вырос в крупнейшего математика. Огромно научное наследие Эйлера, в списке его трудов более 800 названий.

Например, отношение включения между множествами $A=\{a, b, c, d, e\}$ и $B=\{c, d, e\}$ можно представить при помощи кругов Эйлера так, как на рисунке 21.

Множества $A=\{a, b, c, d, e\}$ и $B=\{b, d, k, e\}$ пересекаются, но ни одно из них не является подмножеством другого. Поэтому при помощи кругов Эйлера они изображаются так, как на рисунке 22.

Непересекающиеся множества изображают при помощи двух кругов, не имеющих общих точек (рис. 23).

Устанавливать отношения между множествами — важное умение для учителя. Дело в том, что математика и другие науки изучают не только определенные объекты и явления, но и взаимосвязи, в том числе и отношения между множествами.

Выясним, например, как связаны между собой множество A четных чисел и множество B чисел, кратных 4. В каком из случаев, представленных на рисунке 24, отношение между данными множествами изображено верно?

Проанализируем данные изображения. Из рисунка 24,*а* следует, что все четные числа делятся на 4, что неверно: можно назвать четные числа, которые не делятся на 4, например 14. Этот контрпример сразу делает невозможным равенство данных множеств, т. е. случай, представленный на рисунке 24, *в*. Рисунок 24, *б* говорит о том, что среди чисел, кратных 4, есть четные, но есть и такие, которые не делятся на 2, что также неверно: нетрудно доказать, что любое число, кратное 4, четно. Следовательно, множество чисел, кратных 4, является подмножеством множества четных чисел. Эта связь изображена на рисунке 24, *г*.

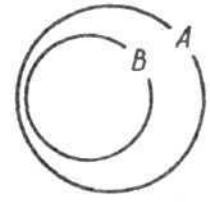


Рис. 21

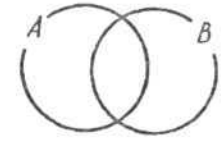


Рис. 22

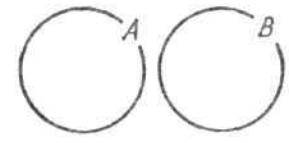
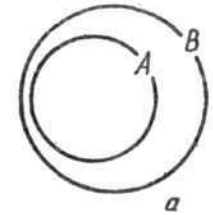
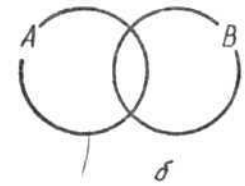
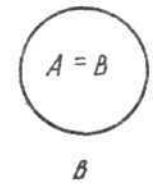


Рис. 23







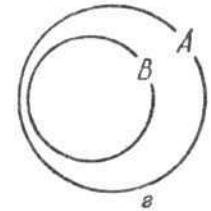


Рис. 24

Так же как и понятие множества, понятие подмножества в начальной математике в явном виде не изучается, но задач, связанных с выделением части некоторой совокупности, учащиеся решают много. Например:

«Среди данных четырехугольников укажи прямоугольники».

«Назови среди данных чисел четные» и т. д.

Упражнения

1. Объясните, почему множество $X=\{2, 4, 6\}$ является подмножеством множества $Y=\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, а множество $Z=\{4, 6, 12\}$ нет.

2. Дано множество $A=\{5, 10, 15, 25\}$. Запишите два множества, равные множеству A.

3. Известно, что элемент a содержится в множестве A и в множестве B. Следует ли отсюда, что: 1) $A\subset B$; 2) $B\subset A$; 3) $A=B$?

4. Известно, что каждый элемент множества A содержится в множестве B. Верно ли, что тогда: 1) $A\subset B$; 2) $A=B$?

5. Из множества $K=\{216, 546, 153, 171, 234\}$ выпишите числа, которые: 1) делятся на 3; 2) делятся на 9; 3) не делятся на 4; 4) не делятся на 5.

Есть ли среди полученных подмножеств такое, которое равно множеству K?

6. Установите, в каком отношении находятся множества решений неравенств и сами неравенства: 1) $x<12$ и $x<10$; 2) $x<12$ и $x>15$; 3) $x<12$ и $x>10$; 4) $x<12$ и $-3x>-36$.

7. Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между множествами A и B, если: 1) A — множество четных чисел, B — множество чисел, кратных 3; 2) A — множество квадратов, B — множество прямоугольников; 3) A — множество квадратов, B — множество прямоугольных треугольников; 4) A — множество квадратов, B — множество прямоугольников с равными сторонами.

8. Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между множествами A, B и C, если известно, что: 1) $A\subset B$ и $B\subset C$; 2) $A\subset B$, C пересекается с B, но не пересекается с A; 3) A, B и C пересекаются, но ни одно не является подмножеством другого.

9. Приведите примеры множеств X, Y и Z, чтобы отношения между ними были такими, как на рисунке 25.

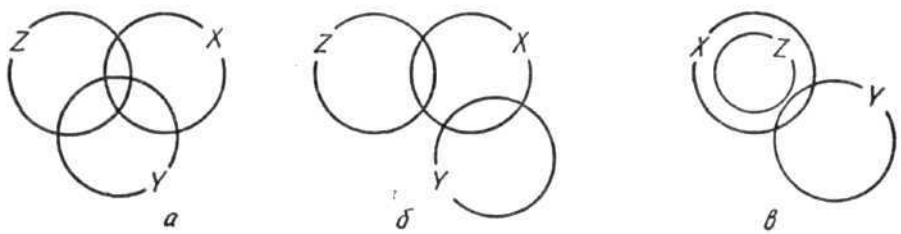


Рис. 25

10. Дано множество $A=\{a, b, c, d\}$. Образуйте все подмножества A, содержащие: 1) два элемента; 2) три элемента.

11. Образуйте всевозможные подмножества множества $P=\{3, 5, 7, 9\}$.

12. Установите, с какими теоретико-множественными понятиями встречаются учащиеся начальных классов, выполняя задание: 1) запиши по порядку числа от 10 до 19. Подчеркни и прочитай четные числа; 2) из ряда чисел от 1 до 20 выпиши по порядку числа, которые делятся без остатка на 5; 3) из чисел 27, 45, 38, 62, 53, 72, 8, 48 выпиши те, которые при делении на 5 дают в остатке 3.

26. Множества и понятия

Как известно, любое понятие имеет объем. Ранее мы говорили об объеме понятия, названного некоторым термином, как о совокупности объектов, которые можно назвать этим термином. С теоретико-множественных позиций объем понятия — это множество объектов, которые можно назвать словом, обозначающим понятие. Например, объем понятия «треугольник» — множество треугольников, объем понятия «прямой угол» — множество прямых углов.

Подход к объему понятия как множеству дает возможность наглядно представлять отношения между понятиями.

Рассмотрим два понятия: понятие a — «прямоугольник» и понятие b — «квадрат». Обозначим их объемы соответственно буквами A и B. Так как всякий квадрат является прямоугольником, то при помощи кругов Эйлера отношения между объемами данных понятий изображаются так, как на рисунке 26. В этом случае говорят, что понятие «прямоугольник» является родовым по отношению к понятию «квадрат», а понятие «квадрат» — видовым по отношению к понятию «прямоугольник».

Существуют понятия, которые не находятся в отношении рода и вида. Например, понятия «квадрат» и «треугольник» — их объемы не находятся в отношении включения.

Понятия рода и вида относительны: одно и то же понятие может быть родовым по отношению к одному и видовым по отношению к другому. Например, понятие «прямоугольник» родовое по отношению к понятию «квадрат» и видовое по отношению к понятию «четырехугольник».

Для одного и того же понятия можно указать несколько родовых по отношению к нему понятий. Так, для понятия «прямоугольник» родовыми являются понятия «четырехугольник», «параллелограмм», «многоугольник». Среди них можно указать ближайшее. Для понятия «прямоугольник» ближайшим родовым понятием является понятие «параллелограмм».

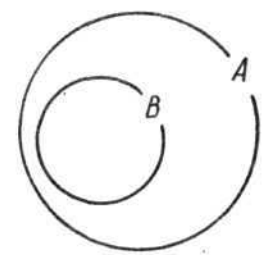


Рис. 26

Упражнения

1. Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между объемами понятий a и b, если:

1) a — «треугольник», b — «прямоугольный треугольник»;

2) a — «прямая», b — «отрезок»;

3) a — «равнобедренный треугольник», b — «тупоугольный треугольник».

2. Покажите при помощи кругов Эйлера, что понятие «прямоугольник» видовое по отношению к понятию «четырехугольник», и назовите свойства четырехугольников, которыми обладают прямоугольники.

3. Изобразите при помощи кругов Эйлера высказывания:

1) Все числа, кратные 6, кратны и 3.

2) Среди чисел, кратных 7, есть числа, кратные 5.

3) Среди нечетных чисел нет ни одного числа, которое делилось бы на 4.

4. Даны понятия: a — «четное натуральное число», b — «нечетное натуральное число», c — «натуральное число». В каком случае на рисунке 27 изображены отношения между объемами данных понятий (объемы обозначены соответственно A, B, C)?

5. Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между понятиями a, b и c, если:

1) a — «однозначное число», b — «двузначное число», c — «натуральное число»;

2) a — «треугольник», b — «равносторонний треугольник», c — «равнобедренный треугольник»;

3) a — «прямые, лежащие в одной плоскости», b — «параллельные прямые», c — «пересекающиеся прямые»;

4) a — «натуральное число», b — «целое число», c — «рациональное число».

6. Приведите примеры понятий, отношения между которыми изображаются так, как на рисунке: 1) 27, *а*; 2) 27, *в*.

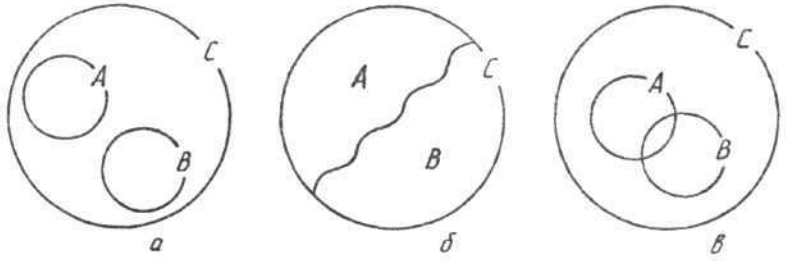


Рис. 27

27. Пересечение множеств

Из элементов двух и более множеств можно образовать новые множества. Считают, что эти новые множества являются результатом операций над множествами, которые, в свою очередь, следует рассматривать как обобщение операций, выполняемых над различными совокупностями. В частности, таких, как нахождение общих элементов двух и более множеств, объединение двух и более совокупностей в одну, удаление из совокупности ее части в другие.

Пусть даны два множества: $A=\{2, 4, 6, 8\}$ и $B=\{5, 6, 7, 8, 9\}$. Образуем множество C, в которое включим общие элементы множеств A и B: $C=\{6, 8\}$. Так, полученное множество C называют пересечением множеств A и B.

Определение. **Пересечением множеств A и B называется множество, содержащее только такие элементы, которые принадлежат множеству A и множеству B.**

Пересечение множеств A и B обозначают $A\cap B$. Если изобразить множества A и B при помощи кругов Эйлера, то пересечение данных множеств изобразится заштрихованной областью (рис. 28). В том случае, когда множества A и B не имеют общих элементов, говорят, что их пересечение пусто и пишут: $A\cap B=\varnothing$.

Операция, при помощи которой находят пересечение множеств, называется также пересечением.

Как находят пересечение множеств в конкретных случаях? Прежде чем рассматривать примеры, заметим, что согласно определению пересечения $\boxed{x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A \text{ и } x\in B}$.

Если элементы множеств A и B перечислены, то, чтобы найти $A\cap B$, достаточно перечислить элементы, которые принадлежат A и B, т. е. их общие элементы.

А как быть, если множества заданы при помощи характеристических свойств их элементов?

Из определения следует, что характеристическое свойство множества $A\cap B$ составляется из характеристических свойств пересекаемых множеств с помощью союза «и».

Найдем, например, пересечение множества A — четных натуральных чисел и множества B — двузначных натуральных чисел. Характеристическое свойство элементов множества A — «быть четным натуральным числом», характеристическое свойство элементов множества B — «быть двузначным натуральным числом». Тогда, согласно определению, элементы пересечения данных множеств должны обладать свойством «быть четным и двузначным натуральным числом». Таким образом, множест-

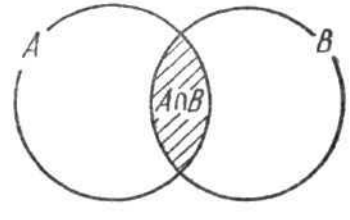


Рис. 28

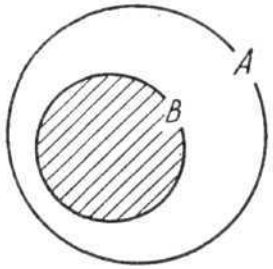


Рис. 29

во $A \cap B$ состоит из четных двузначных чисел (союз «и» в данном случае можно опустить). Полученное множество не пусто. Например, $24 \in A \cap B$, поскольку число 24 четное и двузначное.

Выясним теперь, что представляет собой пересечение множества A — четных натуральных чисел и множества B — натуральных чисел, кратных 4. Данные множества A и B бесконечные, и множество B — подмножество множества A. Поэтому элементами, принадлежащими множеству A и множеству B, будут элементы множества B (рис. 29). Следовательно, $A \cap B = B$.

Упражнения

1. Сформулируйте условия, при которых истинны следующие высказывания: 1) $5 \in A \cap B$; 2) $7 \in A \cap B$.

2. Известно, что $x \in A$. Следует ли отсюда, что $x \in A \cap B$?

3. Известно, что $x \in A \cap B$. Следует ли отсюда, что $x \in A$?

4. A — множество точек окружности, B — множество точек прямой l. Из скольких элементов может состоять пересечение данных множеств? Может ли оно быть пустым? Изобразите возможные случаи на чертеже.

5. Запишите множество S чисел, являющихся однозначными и четными. Пересечением каких множеств оно является?

6. Изобразите при помощи кругов Эйлера пересечение множеств A и B, если: 1) $A \subset B$; 2) $B \subset A$; 3) $A \cap B = \varnothing$.

7. Найдите пересечение множеств A и B, если:

1) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$; $B = \{b, e, f, k, l\}$;
2) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$; $B = \{17, 26, 58\}$;
3) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$; $B = \{2, 6, 3, 9, 1, 7\}$.

8. Из каких элементов состоит пересечение множества букв в слове «математика» и множества букв в слове «геометрия»?

9. M — множество однозначных натуральных чисел, P — множество нечетных натуральных чисел. Какие числа войдут в пересечение данных множеств M и P? Содержатся ли в нем числа 1,5 и 17? Ответ запишите, используя символы $\in$ и $\notin$.

10. Найдите пересечение множеств решений неравенств, в которых переменная — действительное число: 1) $x > -2$ и $x > 0$; 2) $x > -3{,}7$ и $x \leqslant 4$; 3) $x \geqslant 5$ и $x < -7{,}5$; 4) $-2 < x < 4$ и $x \geqslant -1$; 5) $-7 \leqslant x \leqslant 5$ и $-6 \leqslant x \leqslant 2$.

11. Начертите два треугольника так, чтобы их пересечением: 1) был треугольник; 2) был отрезок; 3) была точка; 4) был многоугольник.

12. Какая фигура может получиться в пересечении треугольника и четырехугольника? Рассмотрите несколько случаев.

13. Сколько точек может оказаться в пересечении: 1) прямой и окружности; 2) отрезка и окружности; 3) двух окружностей?

14. Начертите две фигуры, принадлежащие пересечению множеств C и D, при условии, что:

1) C — множество квадратов, D — множество прямоугольников;
2) C — множество ромбов, D — множество прямоугольников.

15. A — множество решений уравнения $3x + y = 15$, B — множество решений уравнения $2x + y = 11$. Найдите множество точек C решений системы этих уравнений. Верно ли, что $C = A \cap B$?

28. Объединение множеств

Для того чтобы объяснить школьнику, что $2 + 3$ — это 5, учитель берет 2 красных кружка и 3 синих. Просит пересчитать эти кружки, затем предлагает к красным кружкам придвинуть синие (т. е. объединить эти две совокупности, два множества) и пересчитать все кружки полученной совокупности. Устанавливается, что их 5, т. е. $2 + 3 = 5$. Таким образом, сложение чисел опирается на операцию объединения двух множеств.

В рассмотренном примере объединялись множества, не имеющие общих элементов. В математике приходится выполнять объединение и пересекающихся множеств.

О п р е д е л е н и е. **Объединением множеств A и B называется множество, содержащее только такие элементы, которые принадлежат множеству A или множеству B.**

Объединение множеств A и B обозначают $A \cup B$.

Если изобразить пересекающиеся множества A и B при помощи кругов Эйлера, то их объединение изобразится заштрихованной областью (рис. 30).

Если множества A и B не пересекаются, то их объединение изображают так, как это сделано на рисунке 31.

Операция, при помощи которой находят объединение множеств, называется также объединением.

Как находят объединение множеств в конкретных случаях? Прежде чем рассмотреть примеры, заметим, что согласно определению объединения $\boxed{x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ или } x \in B}$.

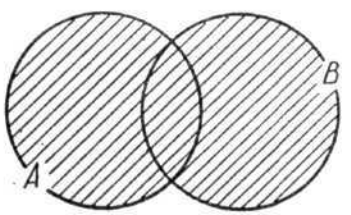


Рис. 30

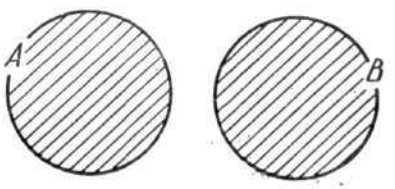


Рис. 31

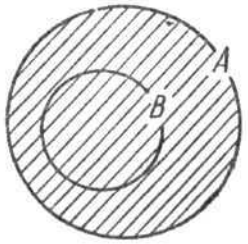


Рис. 32

Если элементы множеств A и B перечислены, то, чтобы найти $A \cup B$, достаточно перечислить элементы, принадлежащие A или B, т. е. хотя бы одному из множеств. Так, если $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, то $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

А как быть в том случае, когда множества заданы при помощи характеристических свойств их элементов?

Из определения следует, что характеристическое свойство множества $A \cup B$ составляется из характеристических свойств множеств A и B с помощью союза «или».

Найдем, например, объединение множества A четных чисел и множества B двузначных чисел. Так как свойство элементов множества A — «быть четным числом», а свойство элементов множества B — «быть двузначным числом», то в объединение данных множеств войдут числа, характеристическое свойство которых — «быть четным или двузначным числом». Такие числа образуют бесконечное множество, но сформулированное характеристическое свойство позволяет однозначно определять, содержится тот или иной элемент в объединении множеств A и B или нет. Например, в $A \cup B$ есть числа: 8, поскольку оно четное; 17, поскольку оно двузначное; 36, поскольку оно четное и двузначное.

Выясним теперь, что представляет собой объединение множества A — четных натуральных чисел и множества B — натуральных чисел, кратных 4. Ранее было установлено, что $B \subset A$. Поэтому элементами, принадлежащими множеству $A \cup B$, будут элементы множества A (рис. 32). Следовательно, в данном случае $A \cup B = A$.

Упражнения

1. Сформулируйте условия, при которых истинны следующие высказывания: 1) $5 \in A \cup B$; 2) $7 \in A \cup B$.

2. Известно, что $x \in A$. Следует ли отсюда, что $x \in A \cup B$?

3. Известно, что $x \in A \cup B$. Следует ли отсюда, что $x \in A$?

4. Известно, что $x \in A$ и $x \in B$. Следует ли отсюда, что $x \in A \cup B$?

5. Запишите множество K однозначных натуральных чисел, являющихся нечетными или кратными 3. Выразите это множество через множество A однозначных нечетных чисел и множество B однозначных чисел, кратных 3.

6. Изобразите при помощи кругов Эйлера объединение множеств A и B, если: 1) $A \subset B$; 2) $B \subset A$.

7. Найдите объединение множеств A и B, если:

1) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$; $B = \{b, e, f, k, l\}$;
2) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$; $B = \{17, 26, 58\}$;
3) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$; $B = \{2, 6, 3, 9, 1, 7\}$.

8. Из каких элементов состоит объединение множества букв в слове «математика» и множества букв в слове «геометрия»?

9. M — множество однозначных натуральных чисел, P — множество нечетных натуральных чисел. Какие числа войдут в объединение множеств M и P? Окажутся ли в нем числа 4, 14, 17? Ответ запишите, используя знаки $\in$ и $\notin$.

10. Найдите объединение множеств решений неравенств, в которых переменная x принимает действительные значения:

1) $x > -2$, $x > 0$; 2) $x > -3{,}7$, $x \leqslant 4$;
3) $x \geqslant 5$, $x < -7{,}5$; 4) $-2 < x < 4$, $x \geqslant -1$;
5) $-7 \leqslant x < 5$, $-6 \leqslant x \leqslant 2$.

11. Какую фигуру будет представлять объединение двух треугольников, если их пересечением является: 1) треугольник; 2) шестиугольник; 3) отрезок?

12. Начертите две фигуры, принадлежащие объединению множеств C и D, если:

1) C — множество квадратов, D — множество прямоугольников;
2) C — множество прямоугольных треугольников, D — множество тупоугольных треугольников.

13. Установите, какие из фигур, приведенных на рисунке 33, содержатся в объединении множества ромбов и множества прямоугольников.

14. Что представляет собой пересечение треугольника ABC и его стороны AB? А их объединение?

15. Изобразите на координатной прямой множество тех значений переменной x, при которых обращается в истинное высказывание предложение: 1) $x \geqslant -4$ и $x \leqslant 1$; 2) $x \leqslant -2$ или $x \geqslant 2$; 3) $|x| \leqslant 3$; 4) $|x| \geqslant 4$.

16. Назовите все множества, о которых идет речь в задаче:

1) У школы посадили 4 липы и 3 березы. Сколько всего деревьев посадили у школы?

2) Пионеры помогали колхозу в уборке моркови. Один отряд собрал 40 корзин моркови, а другой — на 10 корзин больше. Сколько корзин моркови собрали оба отряда?

17. Установите, какое множество является объединением двух других рассматриваемых в задаче: 1) У Коли было 6 книг. В день рождения ему подарили еще 4 книги. Сколько книг стало у Коли?

2) У дома росли 2 сосны, а у моста — на 4 сосны больше. Сколько сосен росло у моста?

3) На каждой тарелке 5 яблок. Сколько яблок на 3 тарелках?

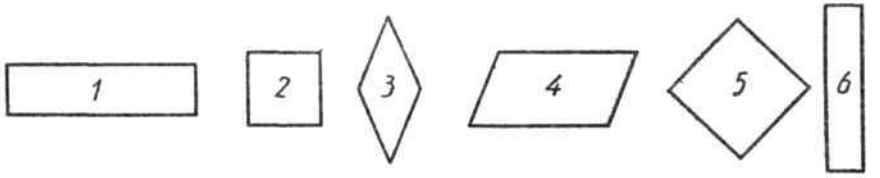


Рис. 33

29. Законы пересечения и объединения множеств

Как известно, операции сложения и умножения чисел подчиняются ряду законов: переместительному, сочетательному и др.

Существуют ли какие-либо законы для операций пересечения и объединения множеств? Существуют, и некоторые из них мы уже использовали. В частности, находя пересечение или объединение множеств, мы не задумывались над порядком оперирования множествами. И это потому, что из определений пересечения и объединения множеств вытекает для любых множеств A и B справедливость равенств $A \cap B = B \cap A$ и $A \cup B = B \cup A$, которые представляют собой запись переместительных законов пересечения и объединения множеств.

Для пересечения и объединения множеств справедливы также сочетательные законы: для любых множеств A, B и C выполняются равенства

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Заметим, что назначение скобок в этих записях то же, что и в записях операций над числами.

Наглядно представить сочетательные законы можно при помощи кругов Эйлера. Рассмотрим, например, сочетательный закон пересечения множеств. Изобразим множества A, B и C в виде трех попарно пересекающихся кругов (рис. 34). В выражении $(A \cap B) \cap C$ скобки определяют порядок действий: сначала выполняется пересечение множеств A и B — оно отмечено на рисунке 34, *а* вертикальной штриховкой, а затем находят пересечение полученного множества и множества C. Если отметить множество C горизонтальной штриховкой, то область, заштрихованная дважды, и будет изображать множество $(A \cap B) \cap C$.

Обратимся теперь к рисунку 34, *б*. Здесь сначала выполняется пересечение множеств B и C — оно отмечено на рисунке вертикальной штриховкой, а затем находят пересечение множества A с полученным множеством. Если отметить множество A горизонтальной штриховкой, то область, заштрихованная дважды, и будет изображать множество $A \cap (B \cap C)$.

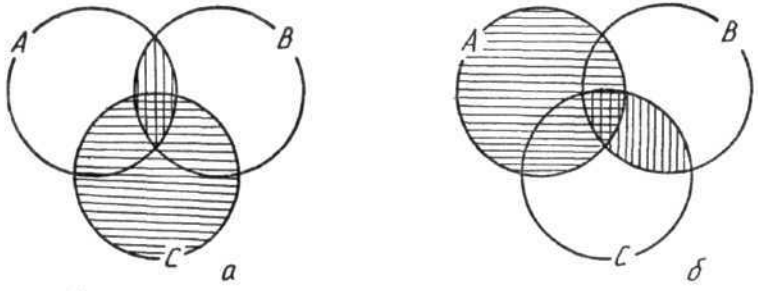


Рис. 34

Видим, что области, представляющие на рисунке множества $(A \cap B) \cap C$ и $A \cap (B \cap C)$, одинаковы, что и подтверждает справедливость сочетательного закона пересечения множеств.

Аналогично можно выполнить иллюстрацию и для сочетательного закона объединения множеств.

Каково назначение рассмотренных сочетательных законов? Они объясняют, как находить пересечение и объединение трех множеств, зная правило для двух. Кроме того, на основании сочетательных законов скобки в выражениях $(A \cap B) \cap C$, $A \cap (B \cap C)$ можно опускать и писать: $A \cap B \cap C$, $A \cup B \cup C$.

Сочетательные законы пересечения и объединения множеств можно распространить на любое число множеств.

Пересечение и объединение множеств связаны друг с другом распределительными законами: для любых множеств A, B и C справедливы равенства

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (A \cap C), \quad (1)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \quad (2)$$

Заметим, что если в выражении есть знаки пересечения и объединения и нет скобок, то сначала выполняют пересечение, так как считают, что операция пересечения более «сильная», чем объединения. В связи со сказанным запись распределительного закона пересечения относительно объединения (1) можно упростить, опустив скобки в правой части равенства.

Упражнения

1. Принадлежит ли элемент x объединению множеств A, B и C, если:

1) $x \in A$; 2) $x \in A$ и $x \in B$; 3) $x \in A$, $x \in B$ и $x \in C$; 4) $x \notin A$, но $x \in C$; 5) $x \notin A$, но $x \in C$ и $x \in B$?

2. Сформулируйте условия, при которых элемент y будет принадлежать множеству $A \cap B \cap C$.

3. В каком порядке надо выполнять действия над множествами в выражении:

1) $A \cup B \cap C$; 2) $A \cap (B \cup C)$; 3) $A \cap B \cap C$?

4. A — множество натуральных чисел, меньших 20, а B, C и D — его подмножества, причем B состоит из чисел, кратных 3, C — из чисел, кратных 4, D — из четных чисел. Какие числа являются элементами множеств:

1) $(A \cap B) \cap C$; 3) $A \cup (B \cup C)$; 5) $A \cap B \cup C$;
2) $A \cap (B \cap C)$; 4) $(A \cup B) \cup C$; 6) $A \cap (B \cup C)$?

Назовите среди множеств пары равных.

5. Используя круги Эйлера, проиллюстрируйте справедливость:

1) сочетательного закона объединения множеств;

2) распределительного закона пересечения относительно объединения.

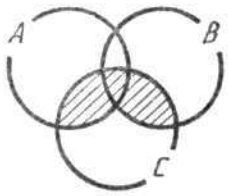


Рис. 35

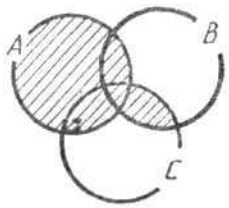


Рис. 36

6. Установите, какая из областей, выделенных штриховкой на рисунках 35 и 36, изображает множество $A \cup B \cap C$.

7. X — множество двузначных чисел, Y — множество четных чисел, P — множество чисел, кратных 4. Каковы характеристические свойства элементов множеств $A = X \cap Y \cap P$ и $B = (X \cup Y) \cap P$?

Изобразите множества X, Y, P, A и B при помощи кругов Эйлера. Назовите три числа, принадлежащие множеству A, и три числа, принадлежащие множеству B.

8. A — множество ромбов, B — множество треугольников, C — множество многоугольников, содержащих угол 60°. Начертите две фигуры, принадлежащие множеству $X = A \cap C \cup B \cap C$.

30. Дополнение подмножества

Чтобы объяснить учащемуся, что $5 - 3 = 2$, часто используют такой прием. Берут 5 предметов, например 5 кружков. После того как учащиеся убедятся при помощи счета, что кружков действительно 5, им предлагают 3 кружка убрать и сосчитать, сколько кружков осталось. Осталось 2, значит, $5 - 3 = 2$.

В чем суть приема? Из данного множества, в котором a элементов, удаляют подмножество, содержащее b элементов. Тогда в оставшейся части множества $a - b$ элементов.

При помощи кругов Эйлера данная ситуация представляется на рисунке 37, где заштрихована та часть, которая осталась после удаления из множества A подмножества B. Эту часть называют **дополнением множества B до множества A.**

О п р е д е л е н и е. **Пусть $B \subset A$. Дополнением множества B до множества A называется множество, содержащее только те элементы множества A, которые не принадлежат множеству B.**

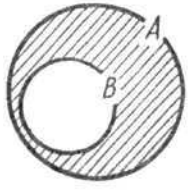


Рис. 37

Дополнение множества B до множества A (при условии, что $B \subset A$) обозначают $A \setminus B$.

Операция, при помощи которой находят дополнение подмножества, называется вычитанием.

Как находят дополнение подмножества в конкретных случаях? Прежде чем рассмотреть примеры, заметим, что согласно определению дополнения

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ и } x \notin B.$$

Если элементы множества A и B перечислены, то, чтобы найти $A \setminus B$, достаточно перечислить элементы, принадлежащие A и не принадлежащие B. Так, если $A = \{1, 2, 3, 5\}$, а $B = \{1, 5\}$, то $A \setminus B = \{2, 3\}$.

В том случае, когда указаны характеристические свойства элементов множеств A и B ($B \subset A$), характеристическое свойство множества $A \setminus B$ имеет вид «$x \in A$ и $x \notin B$». Найдем, например, дополнение множества B до множества A при условии, что A — это множество четных чисел, B — множество чисел, кратных 4, и определим, содержатся ли в этом дополнении числа 20 и 26.

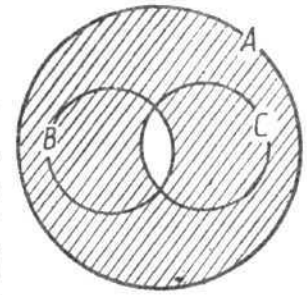


Рис. 38

Так как все числа, кратные 4, четные, то $B \subset A$. Если из множества A удалить все числа, кратные 4, то в нем останутся четные числа, не кратные 4. Значит, $A \setminus B$ — множество четных чисел, не кратных 4. Характеристическое свойство элементов этого множества — «быть четным числом и не кратным 4».

Нетрудно видеть, что $20 \notin A \setminus B$, поскольку 20 — четное число и кратно 4, а $26 \in A \setminus B$, так как 26 — четное число и не кратно 4.

Выясним теперь, из каких чисел состоит множество $A \setminus B \cap C$, если A — множество четных чисел, B — множество чисел, кратных 4, C — множество чисел, кратных 6.

В записи множества $A \setminus B \cap C$ нет скобок. Возникает вопрос: какое действие выполнять первым? Условились считать, что операция пересечения множеств является более «сильной», чем вычитание. Поэтому порядок выполнения действий над множествами в записи $A \setminus B \cap C$ следующий: сначала находят пересечение множеств B и C, а затем полученное множество вычитают из множества A.

Пересечение множеств B и C состоит из чисел, кратных 4 и 6. Если удалить это пересечение из множества A, то в нем останутся четные числа, не кратные 4 и 6 (одновременно). При помощи кругов Эйлера данные множества A, B и C можно изобразить так, как на рисунке 38. Дополнение пересечения множеств B и C до множества A на нем изображено штриховкой.

Упражнения

1. Сформулируйте условия, при которых истинны следующие высказывания:

1) $5 \in A \setminus B$; 2) $7 \notin A \setminus B$.

2. Известно, что $x \in A \setminus B$. Следует ли отсюда, что:

1) $x \in A$; 2) $x \in B$?

3. Найдите дополнение множества C до множества D, если:

1) $C = \{a, б, в, г, д, е\}$; $D = \{a, б, в, г, д, е, ж, и\}$;
2) $C = \{41, 42\}$; $D = \{40, 41, 42, 43, 44\}$;
3) $C = \{9, 10, 11, 12\}$; $D = \{11, 9, 12, 10\}$.

4. Даны множества: A — множество натуральных чисел; B — множество натуральных чисел, кратных 7. Верно ли, что:

1) $84 \in A \setminus B$; 2) $17 \in A \setminus B$?

5. Найдите дополнение множества Y до множества X, если:

1) Y — множество точек отрезка AB, X — множество точек прямой AB;

2) Y — множество точек квадрата, X — множество точек круга, в который вписан данный квадрат.

6. F — множество равнобедренных треугольников, H — множество равносторонних треугольников.

Начертите два треугольника, принадлежащие множеству $F \setminus H$.

7. Из каких чисел состоит дополнение:

1) множества натуральных чисел до множества целых;

2) множества целых чисел до множества рациональных;

3) множества рациональных чисел до множества действительных?

8. Какие числа принадлежат множеству $A \setminus B \cup C$, если:

1) A — множество натуральных чисел; B — множество натуральных чисел, кратных 7; C — множество натуральных чисел, кратных 3;

2) A — множество натуральных чисел; B — множество натуральных чисел, кратных 4; C — множество натуральных чисел, кратных 8?

Указание. Операции вычитания и объединения множеств в случае отсутствия скобок выполняются по порядку.

9. Проиллюстрируйте при помощи кругов Эйлера, что для любых множеств A, B и C, таких, что $B \subset A$, $C \subset A$, истинны равенства:

1) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

2) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

10. Назовите все множества, о которых идет речь в задаче:

1) У Коли 10 книг, 2 книги он подарил товарищу. Сколько книг осталось у Коли?

2) На катке катались 7 мальчиков. Девочек было на 2 меньше, чем мальчиков. Сколько девочек было на катке?

11. Установите, какое множество является дополнением одного множества до другого в каждой из задач:

1) Пионеры сделали 10 игрушек. Из них 8 игрушек они отдали в детский сад. Сколько игрушек осталось у пионеров?

2) У Вани 6 значков, а у Лены на 2 значка меньше. Сколько значков у Лены?

31. Понятие разбиения множества на классы

Понятие множества и операций над множествами позволяют уточнить наше представление о классификации.

Классификация — это действие распределения объектов по классам на основании сходств объектов внутри класса и их отличия от объектов других классов.

Как правило, целью классификации является систематизация наших знаний. Например, в биологии имеется классификация животных, охватывающая до 1,5 млн. различных видов животных, в ботанике — классификация растений, включающая 500 тыс. видов растений. Классификация дает возможность рассмотреть это многообразие в определенной системе, выделить интересующие нас виды растений или животных.

Широко применяется классификация в математике. Например, натуральные числа делятся на четные и нечетные; углы (меньше развернутого) бывают острые, прямые и тупые.

Каким условиям должна удовлетворять правильно выполненная классификация?

Любая классификация связана с расчленением некоторого множества объектов на подмножества. Если при этом каждый элемент данного множества попадает в одно и только одно подмножество, а объединение всех выделенных подмножеств совпадает со всем множеством, то говорят, что данное множество разбито на непересекающиеся подмножества или классы.

Считают, что множество X разбито на классы X_1, X_2, ..., X_n, если:

1) подмножества X_1, X_2, ..., X_n попарно не пересекаются;

2) объединение подмножеств X_1, X_2, ..., X_n совпадает с множеством X.

Если не выполнено хотя бы одно из этих условий, классификацию считают неправильной.

Так, множество X треугольников можно разбить на три класса: остроугольные, прямоугольные и тупоугольные. Действительно, выделенные подмножества попарно не пересекаются (среди остроугольных треугольников нет прямоугольных и тупоугольных, среди прямоугольных — тупоугольных) и их объединение совпадает с множеством X.

Однако не всякая система подмножеств данного множества представляет собой разбиение этого множества. Например, если из множества X треугольников выделить подмножества равнобедренных, равносторонних и разносторонних, то разбиения множества X на классы мы не получим, поскольку множества равнобедренных и равносторонних треугольников пересекаются (все равносторонние треугольники являются равнобедренными).

Итак, классификация связана с выделением из множества его подмножеств. Но чтобы выделить подмножество, достаточно указать характеристическое свойство его элементов.

Рассмотрим, например, множество натуральных чисел. Его элементы обладают различными свойствами. Среди натуральных чисел есть четные, нечетные, кратные 3, кратные 5 и т. д. Предположим, что нас интересуют натуральные числа, обладающие свойством делиться на 3. Это свойство позволяет выделить из множества натуральных чисел подмножество чисел, кратных 3. Тогда про остальные натуральные числа можно сказать, что они не кратны 3, т. е. получаем еще одно подмножество множества натуральных



Рис. 39

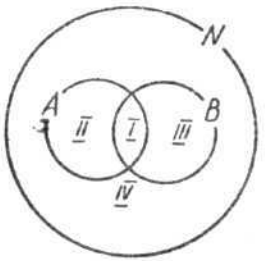


Рис. 40

чисел (рис. 39). Выделенные подмножества не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством N натуральных чисел.

Таким образом, задание одного свойства элементов множества натуральных чисел привело к разбиению этого множества на два класса: класс чисел, кратных 3 (его представителями являются, например, числа 3, 6, 15), и класс чисел, не кратных 3 (его представителями являются, например, числа 4, 5, 13).

А каким будет разбиение множества на классы, если для его элементов указать два свойства, т. е. выделить из множества два различных подмножества?

Обратимся к примерам.

Рассмотрим два свойства натуральных чисел: «быть кратным 3» и «быть кратным 5». При помощи этих свойств из множества натуральных чисел можно выделить два подмножества: A — подмножество чисел, кратных 3, и B — подмножество чисел, кратных 5. Эти подмножества пересекаются, но ни одно из них не является подмножеством другого (рис. 40). Проанализируем получившуюся картину. Круг, изображающий множество N натуральных чисел, разбился на 4 непересекающиеся области — они пронумерованы римскими цифрами. Каждая область изображает некоторое подмножество множества N. Определим, какие числа оказались в каждом из этих непересекающихся подмножеств. Подмножество I состоит из чисел, кратных 3 и 5; подмножество II — из чисел, кратных 3 и не кратных 5; подмножество III — из чисел, кратных 5 и не кратных 3; подмножество IV — из чисел, не кратных 3 и не кратных 5. Объединение этих четырех подмножеств есть множество N.

Таким образом, выделение двух свойств натуральных чисел привело к разбиению множества натуральных чисел на 4 класса: класс чисел, кратных 3 и 5; класс чисел, кратных 3 и не кратных 5; класс чисел, кратных 5 и не кратных 3; класс чисел, не кратных 3 и не кратных 5.

Не следует думать, что задание двух свойств элементов множества приводит к разбиению этого множества именно на 4 класса. Так бывает не всегда. Например, при помощи двух свойств «быть прямоугольным» и «быть тупоугольным» множество треугольников разбивается на три класса (рис. 41):

класс прямоугольных треугольников;

класс тупоугольных треугольников;

класс треугольников, не являющихся ни прямоугольными, ни тупоугольными треугольниками (на рисунке он заштрихован).



Рис. 41

Упражнения

1. Выделите из множества $K=\{0, 2, 6, 8, 9, 12, 15\}$ два подмножества. В одно включите числа, кратные 2, а в другое — кратные 3. Произошло ли разбиение множества K на класс чисел, кратных 2, и класс чисел, кратных 3?

Можно ли разбить данное множество K на три класса:

$$K_1=\{0, 2, 6\}, \quad K_2=\{8, 9\} \quad \text{и} \quad K_3=\{12, 15\}?$$

2. Можно ли разбить множество книг в школьной библиотеке на такие классы: художественная, учебная, техническая и детская литература?

3. Правильны ли следующие классификации:

1) множество углов разбивается на подмножества острых и тупых углов;

2) множество параллелограммов разбивается на подмножества прямоугольников, ромбов и квадратов?

4. На какие классы можно разбить множество букв русского алфавита?

5. На какие классы разбивается множество точек плоскости при помощи: 1) окружности; 2) круга; 3) прямой?

6. Перечертите фигуры, приведенные на рисунке 42, и на каждой из них выделите (различными видами штриховки) непересекающиеся области.

7. Из множества натуральных чисел выделите подмножество чисел, кратных 8. На сколько классов при этом произошло разбиение множества натуральных чисел? Изобразите полученные классы при помощи кругов Эйлера и назовите по два представителя из каждого класса.

8. На какие классы можно разбить множество треугольников при помощи свойства «быть остроугольным»? Начертите по два треугольника — представителей каждого из классов.

9. Некоторые натуральные числа обладают свойством «быть

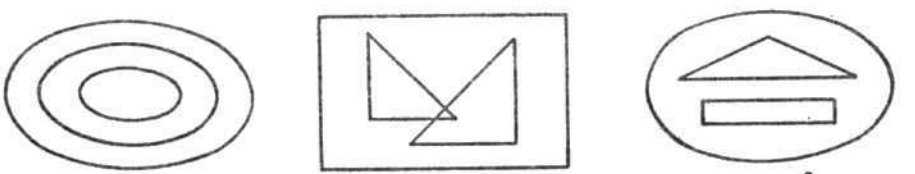


Рис. 42

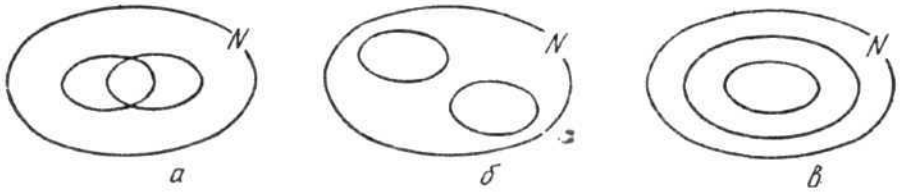


Рис. 43

кратным 3», а некоторые — свойством «быть кратным 9». Установите, в каком из случаев на рисунке 43 изображены подмножества чисел, обладающих указанными свойствами, и определите, на сколько классов при этом разбивается множество натуральных чисел.

10. Определите классы разбиения множества X четырехугольников, если оно осуществляется при помощи:

1) свойства «быть прямоугольником»;
2) свойств «быть прямоугольником» и «быть ромбом»;
3) свойств «быть прямоугольником» и «быть квадратом»;
4) свойств «быть прямоугольником» и «быть трапецией».

11. Покажите, что решение задач связано с разбиением заданного множества на попарно непересекающиеся подмножества:

1) 12 флажков пионеры раздали октябрятам, по 2 флажка каждому. Сколько октябрят получили флажки?

2) Для игры в волейбол 12 ребят разбились на 2 команды поровну. Сколько ребят стало в каждой команде?

12. О каких множествах и операциях над ними идет речь в задачах:

1) С одной грядки сняли 25 кочанов капусты, а с другой — 15 кочанов. Всю эту капусту разложили в корзины, по 8 кочанов в каждую. Сколько потребовалось корзин?

2) Для школьного сада привезли 24 саженца яблонь. На одном участке пионеры посадили 6 саженцев, а на другом — остальные, в 3 ряда поровну. Сколько саженцев посадили в каждом ряду?

3) Для детского сада купили 9 коробок цветных карандашей, по 6 штук в каждой, и 46 черных карандашей. Сколько всего карандашей купили?

4) Марки, собранные для коллекции, Толя разместил на 3 листа альбома, по 6 штук на каждом листе. 4 из них Толя подарил другу. Сколько марок у него осталось?

32. Некоторые задачи, связанные с операциями над конечными множествами

В математике, в том числе и в начальной, часто приходится решать задачи, в которых требуется определить число элементов либо в множестве, либо в объединении множеств, либо в дополнении подмножеств. Существуют определенные приемы решения таких задач.

Условимся обозначать число элементов конечного множества A

символом $n(A)$. Например, если $A=\{m, p, r, s, t\}$, то можно записать, что $n(A)=5$, и сказать, что в множестве A содержится 5 элементов.

Пусть заданы два множества: $A=\{k, l, m\}$ и $B=\{p, t, m, r\}$. Видим, что $n(A)=3$, $n(B)=4$ и $A\cap B\neq\varnothing$, так как множества имеют общий элемент m. В объединение данных множеств войдут все элементы множества A и элементы p, t, r из множества B. Значит, $n(A\cup B)=6$.

Вообще если заданы конечные множества A и B, такие, что $A\cap B\neq\varnothing$, то число элементов в их объединении подсчитывают по формуле

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

Если же множества A и B не имеют общих элементов, т. е. $A\cap B=\varnothing$, то число элементов в их объединении определяют так:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B).$$

Нетрудно убедиться в том, что если $B\subset A$ и известно число элементов в множествах A и B, то число элементов в дополнении подмножества B до множества A подсчитывают по формуле

$$(A\setminus B)=n(A)-n(B).$$

Рассмотрим задачу: «Из 40 учащихся класса 34 выписывают газету «Пионерская правда», 23 — журнал «Пионер», 17 учащихся — и газету, и журнал. Есть ли в классе учащиеся, которые не выписывают ни журнала, ни газеты?»

Анализ условия показывает, что в задаче речь идет о множестве A учащихся класса (в нем 40 элементов), о множестве B учащихся, которые выписывают газету «Пионерская правда» (в нем 34 элемента), и о множестве C учащихся, которые выписывают журнал «Пионер» (в нем 23 элемента). Из условия следует также, что B и C — подмножества множества A, они пересекаются, причем в пересечении содержится 17 элементов. Изобразим описанную ситуацию при помощи кругов Эйлера (рис. 44). Видим, что выделение двух подмножеств B и C привело к разбиению множества A на 4 класса:

учащихся, которые выписывают и газету и журнал, их 17;

учащихся, которые выписывают газету и не выписывают журнал, их 17, так как $34-17=17$ (чел.);

учащихся, которые выписывают журнал и не выписывают газету, их 6, так как $23-17=6$ (чел.);

учащихся, которые не выписывают ни газету, ни журнал.

Чтобы найти число учащихся в этом четвертом классе, необходимо из числа всех учащихся класса вычесть число учащихся, выписывающих газету или журнал, т. е. число

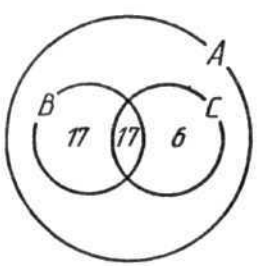


Рис. 44

элементов объединения множеств B и C. Найти число элементов в объединении множеств B и C можно различными способами. Во-первых, просуммировать число учащихся, оказавшихся в первых трех классах: $17+17+6=40$ (учащихся), и, во-вторых, воспользоваться формулой подсчета числа элементов объединения двух пересекающихся множеств: $n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)=84+23-17=40$ (учащихся). Так как в классе всего 40 человек, то число учащихся, не выписывающих ни газеты, ни журнала, равно $40-40=0$, т. е. в классе нет учащихся, которые бы не выписывали ни журнала, ни газеты.

Рассмотрим еще такую задачу: «Из 40 учащихся класса 23 занимается в математическом кружке, а 27— в литературном. Каким может быть число учащихся: а) занимающихся и в математическом, и в литературном кружке; б) занимающихся хотя бы в одном из этих кружков?»

В задаче рассматриваются множества: A — учащихся класса, B — учащихся, занимающихся в математическом кружке, C — учащихся, занимающихся в литературном кружке, и известно, что $n(A)=40$, $n(B)=23$, $n(C)=27$. Число учащихся, занимающихся одновременно в двух кружках,— это число элементов пересечения множеств B и C. Обозначим его через x. Число учащихся, занимающихся хотя бы в одном из этих кружков,— это число элементов в объединении множеств B и C. Обозначим его через y. Числа x и y принимают различные натуральные значения в зависимости от того, какие отношения существуют между множествами B и C (см. п. 25).

В данной задаче множества B и C таковы, что их пересечение всегда не пусто. Действительно, если допустить, что $B\cap C=\varnothing$, тогда $n(B\cup C)=23+27=50$, что невозможно, поскольку в классе всего 40 учащихся. Значит, для множеств B и C в данной задаче возможны случаи, представленные на рисунке 45.

Очевидно, число x элементов в пересечении множеств B и C будет минимальным тогда, когда их объединение совпадает с множеством A, т. е. когда $n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)=23+27-40=10$. Это число может увеличиваться до тех пор, пока множество B не станет подмножеством множества C, и тогда $n(B\cap C)=23$. При этом число учащихся, занимающихся хотя бы в одном из кружков, уменьшится от 40 до 27 (27— это число элементов в объединении множеств B и C при условии, что $B\subset C$).

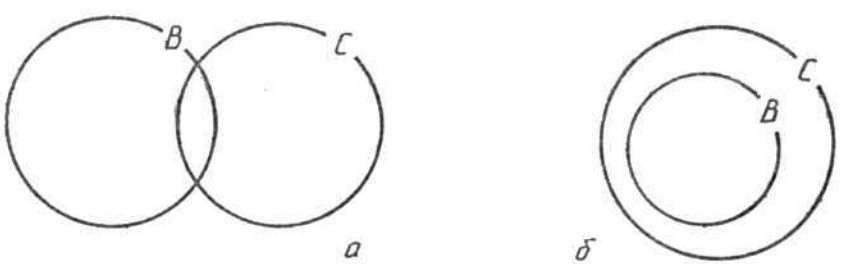


Рис. 45

Таким образом, число учащихся, которые занимаются и в математическом, и в литературном кружке, может изменяться от 10 до 23 включительно, т. е. $10\leqslant x\leqslant 23$, $x\in N$, а число учащихся, которые занимаются хотя бы в одном кружке, при этом изменяется от 40 до 27 включительно, т. е. $27\leqslant y\leqslant 40$, $y\in N$.

Упражнения

1. Можно ли узнать, сколько человек в классе, если в нем: 1) 17 мальчиков и 15 девочек; 2) 17 мальчиков и 23 пионера?

2. Из 50 учащихся 37 изучают английский язык, 17— немецкий. Сколько человек изучают оба языка?

3. В классе несколько мальчиков собирали марки. 15 человек собирали марки СССР, 11 человек собирали иностранные марки, из них 6 человек собирали и марки СССР, и иностранные марки. Сколько мальчиков в классе собирали марки?

4. Из 32 школьников 12 занимаются в волейбольной секции, 15— в баскетбольной, 8 человек занимаются и в той и в другой секции. Сколько школьников не занимается ни в волейбольной, ни в баскетбольной секции?

5. Из 100 студентов английский язык изучают 44 человека, немецкий — 50 человек, французский — 49, английский и немецкий — 13, английский и французский —14, немецкий и французский —12. Все три языка изучают 5 учащихся. Сколько студентов изучают только один язык? Сколько студентов не изучают ни одного языка?

6. В лыжной, хоккейной и конькобежной секциях 38 человек. Известно, что в лыжной секции занимается 21 человек, среди которых 3 человека занимались еще в конькобежной секции, 6 человек еще в хоккейной секции и 1 человек занимался одновременно во всех трех секциях. В конькобежной секции занимались 13 человек, среди которых 5 человек занимались одновременно в двух секциях. Сколько человек занималось в хоккейной секции?

7. В классе 40 человек. Играют в баскетбол 26 человек, занимаются плаванием 25, ходят на лыжах 27. Одновременно занимаются плаванием и баскетболом 15, баскетболом и лыжами 16, плаванием и лыжами 18 человек. Один из учащихся освобожден от занятий по физкультуре. Сколько человек занимается всеми указанными видами спорта? Сколько человек занимается только одним видом спорта?

8. В группе 30 учащихся, из них 18 увлекаются математикой, а 17— русский языком. Каким может быть число учащихся, увлекающихся обоими предметами? увлекающихся хотя бы одним предметом?

9. Из 30 учащихся группы 15 умеют вязать, а 12— шить. Каким

может быть число учащихся, умеющих вязать и шить? умеющих вязать или шить?

10. За границу выехала група туристов из 100 человек. 10 из них не знали ни немецкого, ни французского языка, 75 знали немецкий язык, 83 — французский. Сколько туристов владело обоими иностранными языками?

33. Декартово умножение множеств

В начальных классах учащиеся решают задачу: «Используя цифры 1, 2 и 3, образовать всевозможные двузначные числа». Путем перебора дети получают:

11	12	13
21	22	23
31	32	33

Запись каждого полученного числа состоит из двух цифр, причем существен порядок их следования: например, из цифр 1 и 2 образовано два различных числа 12 и 21.

В том случае, когда важен порядок следования элементов множества, в математике говорят об **упорядоченных наборах элементов.** В данной задаче мы имеем дело с упорядоченными парами.

Упорядоченную пару, образованную из элементов a и b, принято обозначать (a, b), причем элемент a называют **первой координатой (компонентой)** пары, а элемент b **— второй координатой (компонентой)** этой пары.

Пары (a, b) и (c, d) равны только в том случае, если $a=c$ и $b=d$.

В упорядоченной паре может быть, что $a=b$. Так, числа 11, 22, 33 можно рассматривать как упорядоченные пары (1, 1), (2, 2), (3, 3).

Вернемся еще раз к задаче, рассмотренной выше. В ней мы, по существу, оперировали множеством {1, 2, 3}, из элементов которого образовали всевозможные упорядоченные пары.

Можно образовывать упорядоченные пары и из элементов двух различных множеств. Например, возьмем множества $A=\{1, 2, 3\}$ и $B=\{3, 5\}$ и образуем всевозможные упорядоченные пары так, что первая компонента выбирается из множества A, а вторая компонента — из множества B. Получим множество:

$$\{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5)\}.$$

В данную задачу, носящую формальный характер, можно вложить конкретный смысл — образовать всевозможные двузначные числа так, что цифра десятков выбирается из цифр 1, 2, 3, а цифра единиц может быть 3 или 5.

В процессе решения этой задачи из двух данных множеств A и B образовано новое множество, элементами которого являются упорядоченные пары чисел. Это новое множество называют декартовым произведением множеств A и B.

Определение. **Декартовым произведением множеств A и B называется множество пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, а вторая компонента принадлежит множеству B.**

Декартово произведение множеств A и B обозначают $A\times B$.

Операцию, при помощи которой находят декартово произведение, называют **декартовым умножением множеств.**

Декартово умножение не обладает переместительным свойством, т. е. существуют такие множества A и B, что $A\times B\neq B\times A$. Чтобы убедиться в этом, достаточно образовать декартовы произведения $A\times B$ и $B\times A$ для таких, например, множеств: $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 5\}$. Множество $A\times B$ получено нами раньше (см. с. 88), а множество $B\times A$ таково: $\{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$. Нетрудно видеть, что $A\times B\neq B\times A$, так как множества $A\times B$ и $B\times A$ состоят из различных элементов.

Декартово умножение множеств не подчиняется и сочетательному закону, но связано с операцией объединения множеств распределительным свойством: для любых множеств A, B и C имеет место равенство $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$.

Его мы примем без доказательства.

Элементы декартова произведения двух конечных множеств удобно записывать при помощи прямоугольной таблицы. Например, декартово произведение множеств $A=\{1, 2, 3\}$ и $B=\{3, 5\}$ можно представить в следующем виде:

A \ B	3	5
1	(1,3)	(1,5)
2	(2,3)	(2,5)
3	(3,3)	(3,5)

В математике рассматривают не только упорядоченные пары, но и упорядоченные наборы из трех, четырех и т. д. элементов. Такие упорядоченные наборы называют еще **кортежами.** Так, (1, 5, 6) — кортеж длины 3 (т. е. в нем три элемента), а (7, 8, 9, 4, 3) — кортеж длины 5.

Используя понятие кортежа, можно определить понятие декартова произведения n множеств.

Определение. **Декартовым произведением множеств A_1, A_2, ..., A_n называется множество кортежей длин n, образованных так, что первая компонента кортежа принадлежит множеству A_1, вторая — множеству A_2, ..., n-я — множеству A_n.**

Обозначают декартово произведение множеств A_1, A_2, ..., A_n так: $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$.

Найдем декартово произведение множеств A_1, A_2, A_3, если $A_1=\{2, 3\}$, $A_2=\{3, 4, 5\}$, $A_3=\{7, 8\}$.

Элементами декартова произведения $A_1\times A_2\times A_3$ будут кортежи

длины 3, образованные так: первая компонента будет выбираться из множества A_1, вторая — из множества A_2, третья — из множества A_3. В итоге получим: $A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(2, 3, 7), (2, 3, 8), (2, 4, 7), (2, 4, 8), (2, 5, 7), (2, 5, 8), (3, 3, 7), (3, 3, 8), (3, 4, 7), (3, 4, 8), (3, 5, 7), (3, 5, 8)\}$.

Упражнения

1. Дано уравнение $2x - y = 3$. Запишите несколько решений данного уравнения. Что представляет собой каждое решение? Является ли пара (4, 5) решением данного уравнения? А пара (5, 4)?

2. Элементами множеств A и B являются пары чисел: $A = \{(1, 12); (2, 9), (3, 6), (4, 3), (5, 0)\}$, $B = \{(1, 9), (2, 7), (3, 6), (4, 7), (5, 0)\}$. Какие пары чисел войдут в пересечение данных множеств? А какие в объединение?

3. Запишем множество дробей, числителем которых является число из множества $A = \{4, 5\}$, а знаменателем — число из множества $B = \{3, 7, 9\}$.

4. Перечислите элементы декартова произведения $A \times B$, если:

1) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, n, r\}$;
2) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c\}$;
3) $A = \{a, b, c\}$, $B = \varnothing$;
4) $A = \varnothing$, $B = \{b, n, r\}$.

5. Даны множества $A = \{a, b\}$ и $B = \{c, d\}$. Является ли множество C декартовым произведением множеств A и B, если:

1) $C = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$;
2) $C = \{(a, d), (b, d), (a, c)\}$;
3) $C = \{(a, d), (b, d), (c, d), (a, c)\}$?

6. Запишите различные двузначные числа, используя цифры 1, 2, 3, 4. Сколько среди них таких, запись которых начинается с цифры 3?

Переформулируйте эту задачу, используя понятие декартова произведения множеств.

7. Запишите с помощью прямоугольной таблицы множества $A \times B$ и $B \times A$, если $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Сколько элементов содержат полученные декартовы произведения? Можно ли утверждать, что $A \times B = B \times A$?

8. Даны множества $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $Y = \{0, 4, 6, 8\}$. В каком из следующих случаев истинно высказывание $A \subset X \times Y$, если:

1) $A = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4)\}$;
2) $A = \{(2, 0), (2, 6), (0, 6), (4, 4)\}$;
3) $A = \{(3, 4), (4, 3), (5, 4), (3, 6)\}$?

9. Проверьте справедливость равенства $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ для множеств $A = \{3, 5, 7\}$; $B = \{6, 8, 9\}$, $C = \{0, 1\}$.

10. Выполняется ли для множества $A = \{3, 5, 7, 8, 9\}$, $B = \{8, 9\}$, $C = \{0, 1, 2\}$ равенство $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$?

11. Сколько букв в слове «барабан»? Сколько различных букв в этом слове?

Переформулируйте эту задачу, используя понятия множества и кортежа.

12. Чем отличается множество цифр в записи числа 56 576 от кортежа цифр в его записи?

13. С помощью цифр 1, 2, 3 запишите всевозможные трехзначные числа. Сколько таких чисел получилось?

34. Изображение декартова произведения двух числовых множеств на координатной плоскости

Когда множества A и B конечны и содержат небольшое число элементов, найти их декартово произведение несложно. А если множества A и B бесконечны? Как представить, например, декартово произведение множества A натуральных чисел, больших 3, и множества B натуральных чисел, больших 5?

Круги Эйлера в этом случае нам помочь не могут.

В математике нашли выход из этой ситуации. Оказывается, наглядное изображение декартова произведения двух числовых множеств можно получить при помощи координатной плоскости. Каким образом?

Чтобы ответить на этот вопрос, уточним наши представления о координатной прямой и координатной плоскости.

Координатная прямая — это прямая с заданным на ней началом отсчета, единицей длины и положительным направлением (рис. 46).

Каково назначение координатной прямой?

Возьмем на прямой l точку M (M не совпадает с O) и поставим ей в соответствие такое число x, что:

1) его модуль равен расстоянию от O до M;

2) оно положительно, если точка M лежит на луче OE, и отрицательно, когда точка M лежит на противоположном луче.

Так, определенное число x называют **координатой** точки M и пишут: $M(x)$.

Например, на рисунке 47 точка M имеет координату 4, точка K — координату -2.

В том случае, когда точка M совпадает с точкой O, считают что координата точки M равна нулю, и пишут: $M(0)$.

Таким образом, с введением координатной прямой устанавливается связь между точками прямой и действительными числами: каждой точке M координатной прямой соответствует единственное действительное число x — координата этой точки. Справедливо и обратное утверждение: каждое действительное число x сопоставляет-

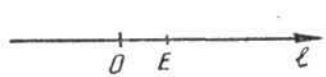


Рис. 46

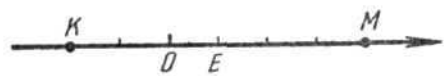


Рис. 47

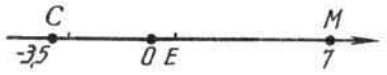


Рис. 48

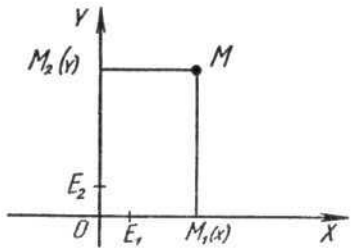


Рис. 49

ся единственной точке M, имеющей число x своей координатой.

Например, число 7 на координатной прямой (рис. 48) можно изобразить точкой M (7), а число $-3{,}5$ — точкой $C(-3{,}5)$.

Возьмем две взаимно перпендикулярные координатные прямые Ox и Oy с общим началом и единицами длины OE_1 и OE_2, такими, что $OE_1 = OE_2$ (рис. 49). Такие прямые Ox и Oy называются осями прямоугольной системы координат, причем прямую Ox называют **осью абсцисс,** а прямую Oy — **осью ординат.** Плоскость с построенными в ней осями координат, имеющими общее начало отсчета (точку пересечения этих прямых) и одну и ту же единицу длины, называют **координатной плоскостью.**

Каково назначение координатной плоскости? Возьмем на координатной плоскости точку M (рис. 49). Ее положение здесь определяется двумя числами: абсциссой и ординатой. Абсцисса точки M — это координата точки M_1 на оси Ox, а ордината точки M — это координата точки M_2 на оси Oy.

Если число x — абсцисса точки M, а число y — ее ордината, то пишут $M(x, y)$ — и говорят, что точка M имеет координаты x и y.

Таким образом, прямоугольная система координат позволяет каждой точке плоскости поставить в соответствие единственную пару действительных чисел — координаты этой точки. Справедливо и обратное утверждение: каждая пара действительных чисел (x, y) сопоставляется единственной точке M, имеющей x и y своими координатами.

Подчеркнем еще раз важность координатного метода: с введением координат (т. е. чисел, определяющих положение точки) на прямой и на плоскости появилась возможность решать многие геометрические задачи средствами алгебры, производя вычисления с числами, а это, в свою очередь, дало возможность применять ЭВМ к решению геометрических задач. И наоборот, при помощи координатной прямой и координатной плоскости можно наглядно решать многие алгебраические задачи.

Понятие координат точек на прямой и на плоскости было впервые введено в геометрию французским ученым и философом Рене Декартом в XVII веке. Это событие явилось началом новой эры в математике — эры рождения и развития понятий функции и геометрического преобразования.

По имени Рене Декарта прямоугольные координаты на плоскости называют еще декартовыми.

Но как связано с именем Декарта, жившего в XVII веке, понятие декартова произведения множеств, введенное в математику в конце XIX века? Чтобы ответить на этот вопрос, выясним сначала, как используют прямоугольную систему координат для наглядного представления декартова произведения двух числовых множеств.

Пусть A и B — числовые множества. Тогда элементами декартова произведения этих множеств будут упорядоченные пары чисел. Изобразив каждую пару чисел точкой на координатной плоскости, получим фигуру, которая и будет наглядно представлять декартово произведение множеств A и B.

Изобразим на координатной плоскости декартово произведение множеств A и B, если:

1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = [3, 5]$;
2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = [3, 5]$;
3) $A \neq [1, 3]$, $B = [3, 5]$;
4) $A = \boldsymbol{R}$, $B = [3, 5]$;
5) $A = \boldsymbol{R}$, $B = \boldsymbol{R}$.

В случае 1 данные множества конечны и содержат небольшое число элементов, поэтому можно перечислить все элементы их декартова произведения: $A \times B = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5)\}$.

Построим оси координат и на оси Ox отметим элементы множества A, а на оси Oy — элементы множества B. Затем изобразим каждую пару чисел из множества $A \times B$ точкой на координатной плоскости (рис. 50). Полученная фигура из шести точек и будет наглядно представлять декартово произведение множеств A и B.

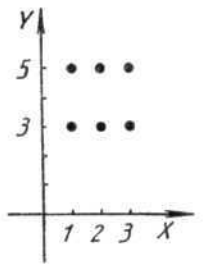


Рис. 50

В случае 2 перечислить все элементы декартова произведения множеств невозможно, поскольку множество B бесконечное.

Но можно представить процесс образования этого декартова произведения: в каждой паре первая компонента либо 1, либо 2, либо 3, а вторая компонента — действительное число из промежутка [3, 5]. Все пары, первая компонента которых есть число 1, а вторая пробегает значения от 3 до 5 включительно, изображаются точками отрезка PM; пары, первая компонента которых равна 2, а вторая принимает все действительные значения из промежутка [3, 5],— точками отрезка KL, а пары, первая компонента которых есть число 3, а вторая — любое действительное число из промежутка [3, 5],— точками отрезка SQ (рис. 51).

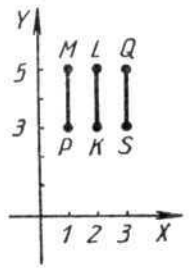


Рис. 51

Таким образом, в случае 2 декартово произ-

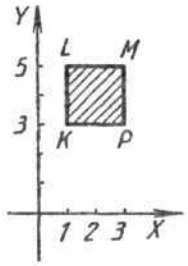


Рис. 52

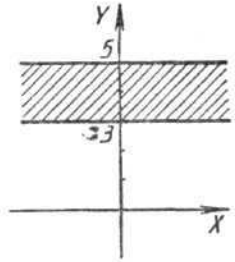


Рис. 53

ведение множеств A и B на координатной плоскости изображается в виде отрезков PM, KL, SQ.

Случай 3 отличается от рассмотренного случая 2 тем, что здесь бесконечно не только множество B, но и множество A. Это приводит к тому, что первой компонентой пары, принадлежащей множеству $A\times B$, могут быть не только концы промежутка $[1, 3]$, но и любое число этого промежутка. Поэтому точки, изображающие элементы декартова произведения множеств A и B, образуют квадрат $KLMP$ (рис. 52). Чтобы подчеркнуть, что элементы декартова произведения изображаются точками квадрата, этот квадрат можно заштриховать.

Случай 4 отличается от предыдущего тем, что множество A состоит из всех действительных чисел, т. е. абсцисса точек, изображающих элементы множества $A\times B$, пробегает все действительные значения, в то время как ордината выбирается из промежутка $[3, 5]$. Множество таких точек образует полосу (рис. 53).

Декартово произведение $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ (случай 5) состоит из всевозможных пар действительных чисел. Точки, изображающие эти пары, сплошь заполняют координатную плоскость. Таким образом, декартово произведение $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ содержит столько же элементов, сколько множество точек координатной плоскости.

Рассмотренные примеры показывают, что название «декартово произведение множеств» не случайно: в нем отражена тесная связь между множеством упорядоченных пар чисел и его представлением в декартовой прямоугольной системе координат.

Упражнения

1. Какую фигуру образуют на координатной плоскости точки, изображающие пары чисел $(-1, 0)$, $(-1, 4)$, $(3, 0)$, $(3, 4)$?

2. Отметьте штриховкой множество точек координатной плоскости, абсциссы которых отрицательны, а ординаты положительны.

3. Какую фигуру образуют точки, если их абсциссы принадлежат множеству $[-2, 2]$, а ординаты — множеству $[-3, 3]$?

4. Изобразите декартово произведение $A\times B$ в прямоугольной

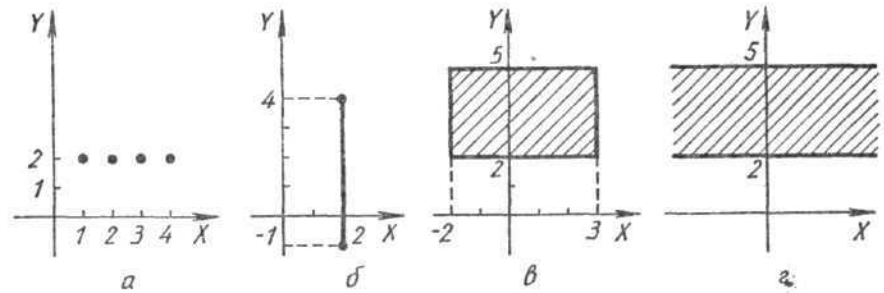


Рис. 54

системе координат, если $A=\{0, 2, 4, 6\}$, а $B=\{1, 3, 5\}$. Принадлежит ли построенной фигуре точка $(2, 3)$? А точка $(3, 0)$?

5. Определите, декартово произведение каких множеств X и Y изображено на рисунке 54.

6. Изобразите в прямоугольной системе координат множество $A\times B$, если:

1) $A=[-2, 2]$, $B=\{2, 3, 4\}$;
2) $A=[-2, 2]$, $B=[2, 4]$;
3) $A=\boldsymbol{R}$, $B=[2, 4]$.

7. Покажите графически, что декартово умножение множеств $A=\{3, 2, 1\}$ и $B=\{4, 4, 6\}$ не обладает переместительным свойством.

35. Некоторые задачи, связанные с декартовым умножением конечных множеств

Мы познакомились с новой операцией над множествами — декартовым умножением. Получая различные декартовы произведения, мы особенно внимательно следили за тем, чтобы получить все его элементы, не пропустить ни одного. Но как проверить, все ли элементы декартова произведения заданных множеств перечислены? Другими словами, как, зная число элементов в множестве A и в множестве B, определить число элементов в декартовом произведении $A\times B$? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема:

Теорема. ***Если множество A содержит m элементов, а множество B — n элементов, то декартово произведение $A\times B$ содержит $m\cdot n$ элементов.***

Доказательство. Пусть $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Тогда множество $A\times B$ состоит из всевозможных пар:

$$(a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_n),$$
$$(a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a_m, b_1), (a_m, b_2), \ldots, (a_m, b_n).$$

В каждом столбце этой таблицы m пар, а таких столбцов n. Значит, всего в множестве $A \times B$ содержится $m \cdot n$ элементов.

Доказанную теорему можно распространить и на декартово произведение n множеств, т. е.

$$n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \ldots \cdot n(A_n).$$

Задача. Сколько элементов в декартовом произведении $A \times A$, если $A = \{a, b, c, d, e\}$?

Решение. Так как в множестве A содержится 5 элементов, то в декартовом произведении $A \times A$ будет $5 \cdot 5 = 25$ пар.

Правило подсчета числа пар декартова произведения двух конечных множеств и его обобщение на случай n множеств широко используются при решении так называемых комбинаторных задач.

Комбинаторные задачи — это задачи, связанные с составлением из элементов конечных множеств по некоторым правилам различных комбинаций.

Так, в задаче «Используя цифры 4, 2, 8, напишите все возможные двузначные числа так, чтобы одна и та же цифра в записи числа не повторялась» требуется рассмотреть различные комбинации из цифр 4, 2, 8 при условии, что цифры в этих комбинациях не повторяются. Следовательно, эта задача, а ее решают в начальных классах, комбинаторная.

Раздел математики, занимающийся решением комбинаторных задач, называется комбинаторикой. Комбинаторика играет важную роль в решении ряда проблем теории вероятности, кибернетики, вычислительной техники и в других областях математики.

Заметим, что правило подсчета числа элементов декартова произведения в комбинаторике носит название правила произведения и часто формулируется в таком виде: если элемент x можно выбрать m способами, а элемент y — n способами, то пару (x, y) можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Задача 1. Из города A в город B ведут три дороги, а из B в C — две дороги. Сколькими способами можно проехать из A в C через B?

Решение. Представим, что из A в B ведут дороги 1, 2 и 3, а из B в C — дороги а и б (рис. 55). Тогда из A в C через B можно проехать следующими способами: (1, а), (1, б), (2, а), (2, б), (3, а), (3, б).

Но можно было решить данную задачу и не прибегая к помощи рисунка, да и все способы проезда из A в C через B рассматривать нет необходимости. Чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно понять, что в ней речь идет о числе всевозможных упорядоченных пар, первая компонента которых выбирается из дорог, ведущих от A к B, а вторая — из дорог, ведущих от B к C. Так как способов выбора дорог от A к B 3, а способов выбора дорог от B к C — 2, то согласно правилу произведения упорядоченную пару дорог можно выбрать $3 \cdot 2 = 6$ способами.

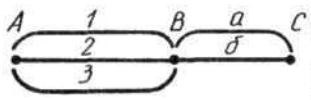


Рис. 55

Задача 2. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 5, 6 и 7, если цифры в записи числа: 1) могут повторяться; 2) не повторяются?

Решение. 1) Если повторения цифр разрешены, то на каждое место в записи трехзначного числа можно поставить любую из данных трех цифр, т. е. способов выбора первой цифры 3, способов выбора второй цифры тоже 3, способов выбора третьей цифры 3. Следовательно, в этом случае можно составить $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ трехзначных чисел. 2) Если цифры в записи числа не повторяются, то способов выбора первой цифры 3, способов выбора второй цифры 2, а способов выбора третьей — 1. Следовательно, в том случае можно составить $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ трехзначных чисел.

Упражнения

1. В множестве A 7 элементов. Сколько элементов в множестве B, если в декартовом произведении $A \times B$ содержится: 1) 42 элемента; 2) 7 элементов; 3) 0 элементов?

2. Набор составляется из книги и блокнота. Сколько различных наборов можно составить, если имеется 20 видов различных книг и 15 видов различных блокнотов?

3. Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 3, 4, если цифры в записи числа: 1) повторяются; 2) не повторяются?

4. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 4, 6, 8, если каждая из них может быть использована в записи числа только один раз? Сколько среди них таких, которые начинаются с цифры 2?

5. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 3, 4, 0, если цифры в записи числа не повторяются?

6. Команда космического корабля состоит из трех человек: командира, бортинженера и врача. На место командира есть 2 кандидата, на место бортинженера — 3, на место врача — 4. Сколькими способами может быть составлена команда корабля?

7. Сколькими способами можно рассадить 5 учащихся, если в классе 40 мест?

8. На окружности отмечены 4 точки. Сколько различных хорд они определяют?

9. В классе изучается 10 предметов. В понедельник 5 уроков, причем все уроки разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

10. Для ведения собрания из 36 человек надо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

11. Сколько можно составить четырехзначных чисел, делящихся на 5?

§ 6. ОТНОШЕНИЯ И СООТВЕТСТВИЯ

36. Понятие отношения

В математике изучают не только сами объекты (числа, фигуры, величины), но и связи, отношения между ними. Так, усвоение понятия натурального числа — одного из ведущих понятий начальной математики и математики вообще — происходит благодаря изучению различных взаимосвязей между числами. Например, выясняется, что:

число 5 **больше** числа 2;

число 10 **больше** числа 8 **на** 2;

число 7 **следует за** числом 6, т. е. числа связаны различными отношениями: «больше», «больше на», «следует за» и др.

В геометрии изучают **параллельность** и **перпендикулярность** прямых, **равенство** и **подобие** фигур, т. е. различные отношения между геометрическими объектами.

Сравнивая множества, мы говорим, например, что они **пересекаются**, или **равны**, или одно **включено** в другое, т. е. устанавливаем отношения между множествами.

В математике чаще всего рассматривают отношения между двумя объектами. Их называют **бинарными**. В нашем курсе мы будем изучать только такие отношения, поэтому в дальнейшем слово «бинарные» будем опускать.

Перед нами стоит задача: имея представления о конкретных отношениях между числами, геометрическими фигурами, множествами и другими объектами, установить, что общего у этих отношений, каким образом можно классифицировать такое огромное число самых разнообразных отношений. Знание этого материала нужно учителю начальных классов для того, чтобы, изучая конкретные отношения в начальной школе, понимать их общность, взаимосвязи, роль в усвоении тех или иных понятий.

Выясним сначала, что общего у различных известных нам отношений.

Рассмотрим множество чисел $X=\{3, 4, 5, 6, 8\}$. Между числами этого множества существует отношение «больше»: $4>3$, $5>3$, $6>3$, $8>3$, $5>4$, $6>4$, $8>4$, $6>5$, $8>5$, $8>6$.

Можно рассмотреть для данных чисел и отношение «больше на 1»: «4 больше 3 на 1», «5 больше 4 на 1», «6 больше 5 на 1».

Числа данного множества связаны также отношением «меньше в 2 раза»: «3 меньше 6 в 2 раза», «4 меньше 8 в 2 раза».

Можно указать и другие отношения между числами 3, 4, 5, 6 и 8, мы ограничимся тремя, названными выше.

Обратим внимание на следующее: рассматривая то или иное отношение, мы каждый раз оперировали упорядоченными парами, образованными из чисел данного множества. Для отношения «больше» это было множество $\{(4, 3), (5, 3), (6, 3), (8, 3), (5, 4), (6, 4), (8, 4), (6, 5), (8, 5), (8, 6)\}$, для отношения «больше на 1» — $\{(4, 3), (5, 4), (6, 5)\}$, а для отношения «меньше в 2 раза» — множество, содержащее две пары: $\{(3, 6), (4, 8)\}$. Таким образом, можно сказать, что каждое из рассматриваемых отношений определяется множеством пар чисел, образованных из элементов множества $X=\{3, 4, 5, 6, 8\}$.

Известно, что упорядоченные пары — это элементы декартова произведения множеств или его подмножеств. Нетрудно видеть, что те множества пар, которые определяют отношения «больше», «больше на 1» и «меньше в 2 раза», являются подмножествами декартова произведения $X\times X=\{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 8), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (4, 8), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (5, 8), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (6, 8), (8, 3), (8, 4), (8, 5), (8, 6), (8, 8)\}$.

Итак, каждое из рассматриваемых отношений определяется множеством пар, которое, в свою очередь является подмножеством декартова произведения $X\times X$.

Вместо того чтобы говорить, что отношение определяется множеством пар, в математике само это множество пар называют отношением между элементами множества X.

Определение. **Отношением между элементами множества X или отношением на множестве X называется всякое подмножество декартова произведения $X\times X$.**

Отношения обозначают прописными буквами латинского алфавита: P, Q, R, S и др. Следовательно, если R — отношение между элементами множества X, то $R\subset X\times X$.

Отношения на конечном множестве X можно представлять наглядно, при помощи особых чертежей, состоящих из точек, соединенных стрелками. Такие чертежи называют **графами**[1].

Построим, например, граф отношения «больше» между элементами множества $X=\{2, 4, 6, 8, 12\}$. Для этого элементы данного множества изобразим точками и соединим стрелками те точки, которые изображают числа, находящиеся в отношении «больше». Поскольку $4>2$, то проводим стрелку от 4 к 2; так как $6>4$, то проводим стрелку от 6 к 4 и т. д., пока не переберем все пары чисел, связанных заданным отношением. В результате получаем граф отношения «больше» для элементов множества $X=\{2, 4, 6, 8, 12\}$ (рис. 56).

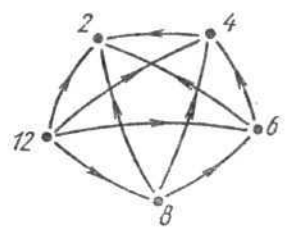


Рис. 56

Рассмотрим теперь на том же множестве X отношение «кратно» и построим его граф. Аналогично предыдущему случаю изобразим элементы множества X точками и соединим стрелками те, которые изображают числа, находящиеся в отношении «кратно»: 12

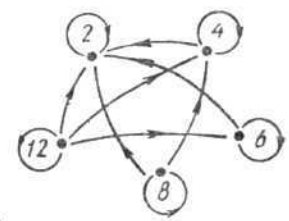


Рис. 57

[1] Слово «граф», так же как и слово «график», происходит от греческого слова «графо» — пишу.

кратно 2, 12 кратно 4 и т. д. Так как любое число из множества X кратно самому себе, то граф данного отношения будет иметь стрелки, начало и конец которых совпадут (рис. 57). Такие стрелки на графе называют **петлями.**

Упражнения

1. Приведите примеры отношений, существующих между:

1) натуральными числами; 2) прямыми на плоскости; 3) треугольниками; 4) множествами.

2. Из элементов множества $X=\{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ образуйте всевозможные пары чисел так, чтобы компоненты пары (x, y) были связаны отношением:

1) «x больше y в 3 раза»; 2) «x больше y на 3». Постройте графы данных отношений.

3. Какое из следующих множеств является отношением между элементами множества $A=\{0, 3, 6, 9, 12\}$:

1) $P=\{(6, 3), (9, 3), (12, 3), (12, 6), (3, 3), (6, 6), (9, 9), (12, 12)\}$;
2) $T=\{(3, 3), (3, 6), (3, 9), (3, 12), (6, 6), (9, 9), (12, 12)\}$;
3) $M=\{(3, 6), (6, 12), (9, 18)\}$?

4. Установите, какой из графов, приведенных на рисунке 58, является графом отношения «x — делитель числа y», заданного на множестве $B=\{5, 10, 20, 30, 40\}$.

5. На множестве $X=\{0, 2, 4, 6, 8\}$ заданы отношения P, Q, S. Постройте их графы, если:

P — отношение «меньше»;
Q — отношение «меньше в 2 раза»;
S — отношение «меньше на 2».

6. Множество M членов семьи Волковых состоит из отца Михайла Петровича, матери Веры Ивановны и детей: Толи, Кати, Пети и Оли. Между членами семьи существуют различные отношения родства. Постройте графы отношений: 1) «быть дочерью»; 2) «быть братом»; 3) «быть матерью».

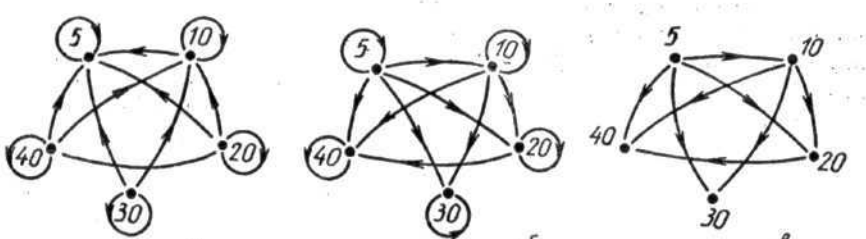


Рис. 58

7. На рисунке 59 дан граф отношений «быть братом» на множестве детей, живущих в одном доме (дети обозначены точками А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З). Кто из них является девочкой, а кто мальчиком? О ком из ребят по этому графу нельзя ничего сказать?

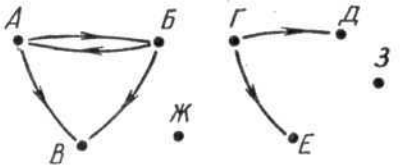


Рис. 59

37. Способы задания отношений

По определению отношение R между элементами множества X есть всякое подмножество декартова произведения $X \times X$, т. е. множество, элементами которого являются упорядоченные пары. Поэтому способы задания отношений, по существу, такие же, как и способы задания множеств.

1. Отношение R на множестве X можно задать, перечислив все пары элементов, взятых из множества X и связанных этим отношением.

Формы записи при этом могут быть различными. Например, некоторое отношение R на множестве $X=\{4, 5, 6, 7, 9\}$ можно задать, записав множество пар: $\{(5, 4), (6, 4), (6, 5), (7, 4), (7, 5), (7, 6), (9, 4), (9, 5), (9, 6), (9, 7)\}$. То же отношение можно задать при помощи графа (рис. 60).

2. Чаще отношение R на множестве X задают, указав характеристическое свойство всех пар элементов, находящихся в отношении R. Это свойство формулируется в виде предложения с двумя переменными, хотя обозначения переменных иногда опускаются.

Например, среди отношений на множестве $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел мы уже называли такие: «число x больше числа y», «число x — делитель числа y», «число x меньше числа y в 3 раза» и др. Правда, мы имели дело, как правило, с краткой формой этих предложений: говорили об отношениях «больше», «быть делителем», «меньше в 3 раза».

В математике многие предложения с двумя переменными записывают, используя символы. Например, отношение «больше» для чисел может быть задано в виде неравенства $x > y$, а отношение «число x меньше числа y в 3 раза» — в виде равенства $y=3x$. Отношения между прямыми плоскости задают как в краткой форме (отношения параллельности, перпендикулярности и др.), так и используя символы: $x \parallel y$, $x \perp y$.

Особые знаки используют и для записи отношений между треугольниками: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $\triangle ABC \sim$

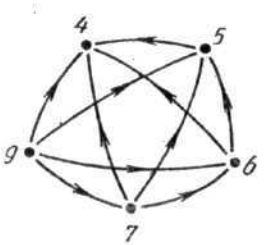


Рис. 60

$\sim \triangle A_1B_1C_1$. Обобщением приведенных записей является запись xRy, которая означает, что элемент x находится в отношении R с элементом y.

Ни в начальном курсе математики, ни в средней школе понятие отношения в общем виде не вводится, здесь изучают конкретные отношения между различными объектами.

В начальной математике большое внимание уделяется изучению отношений между числами. Задают их по-разному: при помощи предложений с двумя переменными, имеющими краткую форму («больше», «больше в ... раз», «меньше на ...»), заполняют таблицы. Со значительным числом отношений учащиеся начальных классов встречаются при решении текстовых задач. Например, чтобы решить задачу «Колхоз продал государству 364 т пшеницы, риса на 76 т меньше, чем пшеницы, а гречихи в 32 раза меньше, чем ржи. Сколько всего зерна продал колхоз государству?» учащийся должен хорошо понимать смысл отношений «меньше на 76» и «меньше в 32 раза».

Упражнения

1. Задайте различными способами какое-либо отношение между элементами множества $A=\{3, 6, 9, 18, 27\}$.

2. Запишите в виде равенства предложение:

1) число x больше числа y на 5; 2) число x меньше числа y на 7; 3) число x больше числа y в 5 раз; 4) число x меньше числа y в 5 раз.

3. Задайте в виде неравенства с двумя переменными отношения:

1) «меньше»; 2) «меньше или равно».

4. Приведите примеры отношений, рассматриваемые в начальных классах:

1) на множестве натуральных чисел; 2) на множестве отрезков; 3) в текстовых задачах.

5. Элементы множества $X=\{0, 1, 3, 4, 6\}$ находятся в отношении $P=\{(0, 1), (0, 3), (0, 4), (0, 6), (1, 4), (6, 6)\}$. Постройте граф этого отношения.

6. Постройте граф отношения «больше или равно», заданного на множестве $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Как задать это отношение при помощи неравенства с двумя переменными?

7. Решите задачи, выделив предварительно отношения, которые в них рассматриваются:

1) На одной полке было в 3 раза больше книг, чем на другой. Когда с первой полки сняли 8 книг, а на другую положили 5 книг, то на второй полке стало на 17 книг меньше, чем на первой. Сколько книг было на каждой полке?

2) На автобазе было на 46 грузовых машин больше, чем автобусов. Сколько грузовых машин было на автобазе, если их было в 3 раза больше, чем автобусов?

38. Свойства отношений

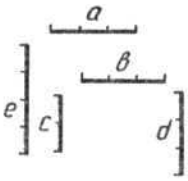


Рис. 61

Ранее мы установили, что в математике изучают разнообразные отношения между двумя объектами. Каждое из них рассматривается на некотором множестве X и представляет собой множество пар.

Но как изучить такое количество отношений? Нельзя ли их каким-либо образом классифицировать? Оказывается, можно. Для этого нужно выделить свойства отношений.

Рассмотрим на множестве отрезков, представленных на рисунке 61, отношения параллельности[1], перпендикулярности, равенства и «длиннее». Построим графы этих отношений (рис. 62).

Чем объясняется сходство графов отношений параллельности и равенства? Или графов отношений перпендикулярности и параллельности? Очевидно, тем, что эти пары отношений обладают «похожими» свойствами. Какими?

Рассмотрим графы отношений параллельности и равенства. Они имеют петли, которые говорят о том, что, какой бы отрезок из множества X мы ни взяли, о нем можно сказать, что он параллелен самому себе или что он равен самому себе.

Про отношения параллельности и равенства говорят, что они

[1] При этом будем исходить из следующего определения отношения параллельности: прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости, не имеют общих точек или совпадают.

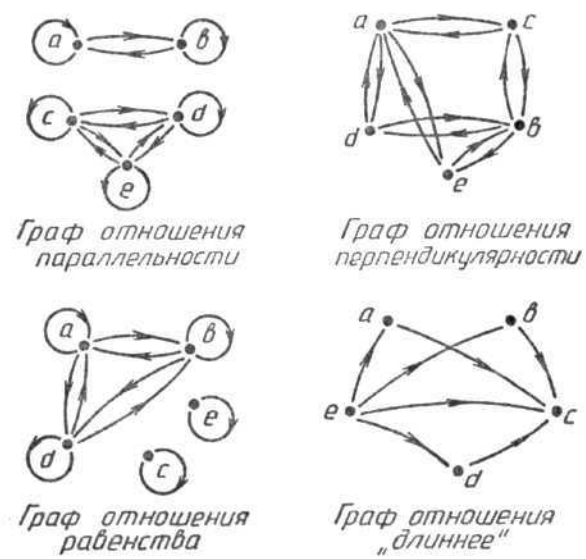


Рис. 62

обладают свойством рефлексивности или, просто, что они рефлексивны.

Определение. **Отношение R на множестве X называется рефлексивным, если о любом элементе множества X можно сказать, что он находится в отношении R с самим собой.**

Данное определение можно записать короче:

$$R \text{ рефлексивно на } X \Leftrightarrow xRx \text{ для любого } x \in X$$

Как мы уже заметили, если отношение R рефлексивно, то в каждой вершине графа имеется петля. Справедливо и обратное: граф, каждая вершина которого имеет петлю, представляет собой граф некоторого рефлексивного отношения.

Существуют отношения, которые свойством рефлексивности не обладают. Таким, например, является отношение перпендикулярности (рис. 62): нет ни одного отрезка в множестве X, о котором можно было бы сказать, что он перпендикулярен самому себе.

Обратим теперь внимание на графы отношений параллельности, перпендикулярности и равенства отрезков. Их особенность в том, что если есть одна стрелка, соединяющая пару элементов, то обязательно есть и другая, соединяющая те же элементы, но идущая в противоположном направлении. Эти стрелки говорят о том, что:

1) если первый отрезок параллелен второму отрезку, то и второй отрезок параллелен первому;

2) если первый отрезок перпендикулярен второму отрезку, то и второй отрезок перпендикулярен первому;

3) если первый отрезок равен второму отрезку, то и второй отрезок равен первому.

Про отношения параллельности, перпендикулярности и равенства говорят, что они обладают свойством симметричности или, просто, симметричны.

Определение. **Отношение R на множестве X называется симметричным, если из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y, следует, что и элемент y находится в отношении R с элементом x.**

Короче:

$$R \text{ симметрично на } X \Leftrightarrow xRy \Rightarrow yRx .$$

Граф симметричного отношения обладает особенностью: вместе с каждой стрелкой, идущей от x к y, граф содержит и стрелку, идущую от y к x. Справедливо и обратное утверждение: граф, содержащий вместе с каждой стрелкой, идущей от x к y, и стрелку, идущую от y к x, является графом симметричного отношения.

Существуют отношения, которые свойством симметричности не

обладают. Таким, например, является отношение «длиннее» для отрезков.

Рассмотрим граф этого отношения. Его особенностью является, то, что если стрелка соединяет две вершины, то она только одна. Про отношение «длиннее» говорят, что оно обладает свойством антисимметричности или, просто, антисимметрично.

Определение. **Отношение R на множестве X называется антисимметричным, если для различных элементов x и y из множества X из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y, следует, что элемент y в отношении R с элементом x не находится.**

Короче:

$$R \text{ антисимметрично на } X \Leftrightarrow xRy \text{ и } x \neq y \Rightarrow \overline{yRx} .$$

Граф антисимметричного отношения обладает особенностью: если две вершины графа соединены стрелкой, то эта стрелка только одна. Справедливо и обратное утверждение: граф, вершины которого соединяются только одной стрелкой, является графом антисимметричного отношения.

Не следует думать, что все отношения делятся на симметричные и антисимметричные. Встречаются отношения, которые не обладают ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности. Рассмотрим, например, отношение «быть братом» на множестве детей одной семьи. Пусть в семье трое детей: Коля, Миша, Таня. Тогда граф отношения «быть братом» будет таким, как на рисунке 63.

Он показывает, что данное отношение не обладает ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности.

Обратим внимание еще на одну особенность графов отношений параллельности, равенства и «длиннее» (эта особенность не сразу заметна): если стрелка идет от первого элемента ко второму и от второго — к третьему, то обязательно есть стрелка, идущая от первого элемента к третьему. Эта особенность графов отражает свойство данных отношений, называемое свойством транзитивности.

Определение. **Отношение R на множестве X называется транзитивным, если из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y и элемент y находится в отношении R с элементом z, следует, что элемент x находится в отношении R с элементом z.**

Короче:

$$R \text{ транзитивно на } X \Leftrightarrow xRy \text{ и } yRz \Rightarrow xRz .$$

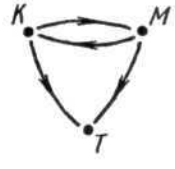


Рис. 63

Граф транзитивного отношения с каждой парой стрелок, идущих от x к y и от y к z, содержит и

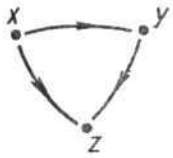


Рис. 64

стрелку, идущую от x к z (рис. 64). Справедливо и обратное утверждение.

Существуют отношения, которые свойством транзитивности не обладают. Таким отношением является, например, отношение перпендикулярности отрезков: если a перпендикулярен d и d перпендикулярен b, то a не перпендикулярен b.

Выделенные свойства отношений позволяют сравнивать различные отношения с общих позиций — наличия у них тех или иных свойств. Так, рассмотренные нами отношения параллельности и равенства отрезков обладают одними и теми же свойствами: они рефлексивны, симметричны и транзитивны. Отношение перпендикулярности отлично от них, поскольку оно симметрично и не обладает ни свойством рефлексивности, ни свойством транзитивности. Иной характер у отношения «длиннее» — оно антисимметрично и транзитивно.

Упражнения

1. На множестве $X=\{1, 2, 4, 8, 12\}$ задано отношение «x кратно y». Постройте граф и сформулируйте свойства данного отношения.

2. Чем отличается граф отношения «x — делитель y», заданный на множестве X (см. упр. 1), от графа отношения «x кратно y»? Есть ли отличия в свойствах этих отношений?

3. На множестве A отрезков (рис. 65) заданы отношения «равно» и «короче». Постройте графы и сформулируйте свойства данных отношений. Какое из этих отношений не обладает свойством рефлексивности? Каковы особенности его графа?

4. Обладает ли свойством рефлексивности отношение «кратно», заданное на множестве $B=\{0, 2, 4\}$?

5. На множестве $X=\{2, 3, 4, 5, 6\}$ заданы отношения «больше» и «больше или равно». Постройте графы и сформулируйте свойства данных отношений. Какое из них обладает свойством рефлексивности? Почему?

6. Каковы свойства отношений «больше в 2 раза» и «больше на 2», заданных на множестве $Y=\{2, 4, 6, 8, 12\}$? В чем сходство графов данных отношений? Правильно ли рассуждение: «Отношение «больше в 2 раза» антисимметрично, так как из того, что x больше y в 2 раза, не следует, что y больше x в 2 раза»?

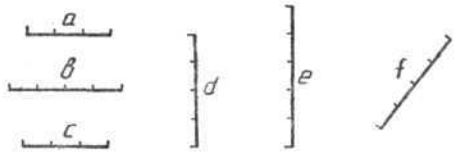


Рис. 65

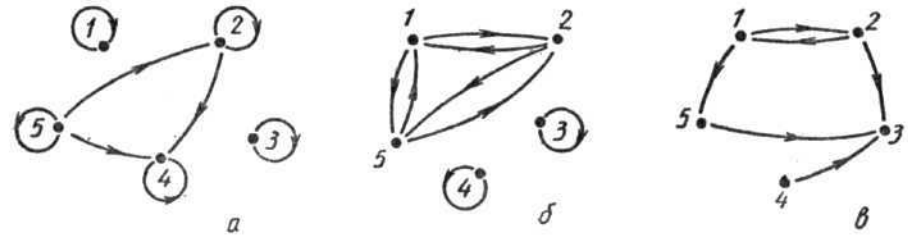


Рис. 66

7. Построили граф отношения R, и оказалось, что он имеет стрелку, идущую от элемента a к элементу b и от элемента b к элементу c, а стрелки, идущей от a к c, нет. Может ли отношение R быть транзитивным? Почему?

8. На графе отношения S есть стрелка, идущая от элемента x к элементу y. Может ли отношение S быть транзитивным?

9. На множестве $E=\{a, b, c, d\}$ задано отношение $R=\{(a, b), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (c, d), (c, a), (a, b)\}$. Какими свойствами оно обладает?

10. На рисунке 66 приведены графы отношений, заданных на множестве $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Какие из этих отношений: 1) рефлексивны; 2) транзитивны; 3) симметричны и транзитивны; 4) антисимметричны и транзитивны?

11. Установите, какие отношения рассматриваются в следующих задачах, и обоснуйте сходство способов их решения:

1) Пионеры сделали к карнавалу 15 шапочек для мальчиков, а для девочек в 2 раза больше. Сколько всего карнавальных шапочек они сделали?

2) Октябрята вырезали для елки 26 звездочек, это в 2 раза меньше, чем снежинок. Сколько всего звездочек и снежинок вырезали октябрята?

39. Отношение эквивалентности

На множестве дробей $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}\right\}$ задано отношение равенства. Граф его приведен на рисунке 67. Какими свойствами обладает данное отношение?

1) Оно рефлексивно, так как любая дробь равна сама себе.

2) Оно симметрично, так как из того, что дробь x равна дроби y, следует, что и дробь y равна дроби x.

3) Оно транзитивно, так как из того, что дробь x равна дроби y и дробь y равна дроби z, следует, что дробь x равна дроби z.

Таким образом, отношение равенства дробей рефлексивно, симметрично и транзитивно. Говорят, что оно является **отношением эквивалентности.**

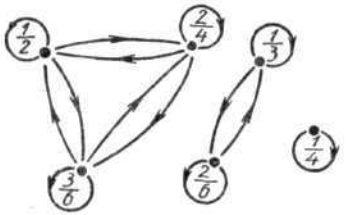


Рис. 67

Определение. **Отношение R на множестве X называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.**

Отношениями эквивалентности являются, например, отношение параллельности прямых, отношение равенства фигур.

Почему в математике выделили этот вид отношений?

Посмотрим на граф отношения равенства дробей, а также на графы отношений параллельности и равенства отрезков (рис. 62). Все они отличаются от графов других отношений тем, что на них видно, как множество, на котором задано отношение, разбивается на несколько подмножеств. Так, на графе отношения равенства дробей (рис. 67) выделяются три подмножества: $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}\right\}$, $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}\right\}$, $\left\{\frac{1}{4}\right\}$. Эти подмножества не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством X, т. е. имеем разбиение множества X на попарно непересекающиеся подмножества. Аналогичную картину мы имеем и для отношений параллельности и равенства отрезков. Это не случайно.

Теорема. ***Если на множестве X задано отношение эквивалентности, то оно разбивает это множество на попарно непересекающиеся подмножества (классы эквивалентности).***

Верно и обратное утверждение: если какое-либо отношение, заданное на множестве X, определило разбиение этого множества на классы, то это отношение есть отношение эквивалентности.

Эту теорему мы принимаем без доказательства.

Если отношение эквивалентности имеет название, то соответствующее название дается и классам. Например, если на множестве отрезков задать **отношение равенства** (оно является отношением эквивалентности), то множество отрезков разобьется на **классы равных отрезков.** Множество треугольников **отношением подобия** разбивается на **классы подобных треугольников.**

В чем важность такого разбиения множества на классы? Дело в том, что в каждом классе эквивалентности оказываются эквивалентные элементы, т. е. элементы, неразличимые с точки зрения некоторого отношения. Например, равные дроби или подобные треугольники. Поэтому считают, что класс эквивалентности (множество) определяется любым (одним) своим представителем, т. е. произвольным элементом этого класса. Так, любой класс равных дробей можно задать, указав любую дробь, принадлежащую этому классу.

Определение класса эквивалентности по одному представителю позволяет вместо всех элементов множества изучать совокупность отдельных представителей из классов эквивалентности.

Упражнения

1. X — множество прямых плоскости. Какое из следующих отношений является отношением эквивалентности на этом множестве: 1) «x параллельна y»; 2) «x перпендикулярна y»; 3) «x пересекает y»?

2. На множестве $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ задано отношение «иметь один и тот же остаток при делении на 3». Покажите, что данное отношение есть отношение эквивалентности, и запишите все классы эквивалентности, на которые разбивается множество X. Сколько таких классов получилось?

3. Сколько классов эквивалентности определит на множестве X (см. упр. 2) отношение «иметь один и тот же остаток при делении на 4»? Запишите эти классы. Назовите по одному представителю каждого класса.

4. На множестве M прямоугольников (рис. 68) задано отношение равновеликости. Покажите, что оно является отношением эквивалентности, и назовите классы, на которые разобьется множество M при помощи этого отношения.

5. Можно ли разбить множество $X=\{7-3;\ 2^2;\ 5\cdot 2;\ 60:6;\ 1+3;\ 0:4;\ 0\cdot 10;\ 4:(10-10)\}$ на классы при помощи отношения «иметь равные значения»?

6. Объясните, почему отношение равенства отрезков является отношением эквивалентности, а отношение «короче» не является.

7. На множестве $X=\{213, 37, 21, 87, 82\}$ задано отношение P — «иметь в записи одинаковые цифры». Является ли P отношением эквивалентности?

8. Отношение T — «иметь одно и то же число делителей» задано на множестве $\{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11\}$. Покажите, что T — отношение эквивалентности, и запишите все классы эквивалентности.

9. На множестве целых чисел от 0 до 999 задано отношение R — «иметь в записи одно и то же число цифр». Покажите, что R — отношение эквивалентности. На сколько классов оно разбивает данное множество чисел? Назовите наименьший и наибольший элементы каждого класса разбиения.

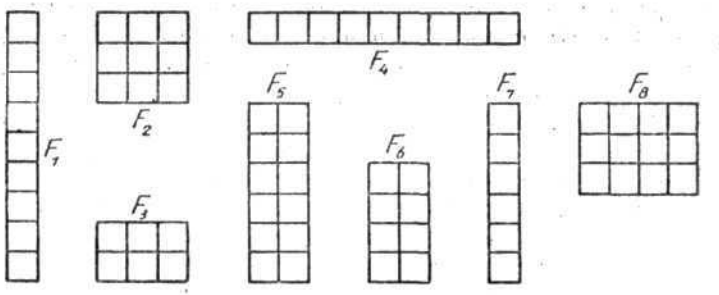


Рис. 68

10. Сколько классов эквивалентности определяет на множестве натуральных чисел отношение «оканчиваться одной и той же цифрой»? Назовите по одному представителю каждого класса.

40. Отношение порядка

Слово «порядок» мы употребляем часто как в обыденной жизни, так и на занятиях по математике. Мы говорим о порядке поступления на работу, о порядке слов в предложении; на уроках математики обсуждаем порядок выполнения действий, порядок записи решения уравнения, задачи и т. д.

Что же такое порядок?

Обратимся к нескольким примерам.

1) Чтобы установить порядок в множестве учащихся класса, достаточно выстроить их по росту. На практике эта процедура сводится к сравнению пар учащихся, т. е. на множестве учащихся рассматривается отношение «быть выше». Это отношение антисимметрично и транзитивно.

2) Множество учащихся класса можно упорядочить и по возрасту, т. е. задав отношение «быть старше». Заметим, что это отношение также антисимметрично и транзитивно.

3) Всем известен порядок следования букв в русском алфавите. Его обеспечивает отношение «следует», обладающее свойствами антисимметричности и транзитивности.

Замеченные нами свойства отношений, устанавливающих некоторый порядок в множестве, и легли в основу определения отношения порядка.

Определение. **Отношение R на множестве X называется отношением порядка, если оно транзитивно и антисимметрично.**

Множество X с заданным на нем отношением порядка называется упорядоченным множеством.

Множество $X=\{2, 8, 12, 32\}$ можно упорядочить при помощи отношения «меньше» (рис. 69, *а*), а можно это сделать при помощи отношения «кратно» (рис. 69, *б*). Но, являясь отношениями порядка, отношения «меньше» и «кратно» упорядочивают множество натуральных чисел по-разному. Отношение «меньше» позволяет сравнивать два любых различных числа из множества X, а отношение «кратно» таким свойством не обладает. Например, пара чисел

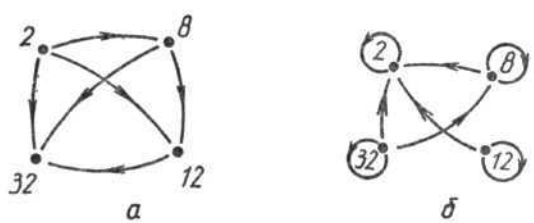


Рис. 69

8 и 12 отношением «кратно» не связана: нельзя сказать, что 8 кратно 12 либо 12 кратно 8.

Не следует думать, что все отношения делятся на отношения эквивалентности и отношения порядка. Существует огромное число отношений, не являющихся ни отношениями эквивалентности, ни отношениями порядка.

Уже в I классе учащиеся знакомятся с отношениями «больше» и «меньше» для натуральных чисел. Затем появляются отношения «длиннее» и «короче» для отрезков. При помощи этих отношений устанавливается порядок в множестве чисел и в множестве отрезков.

Упражнения

1. X — множество отрезков. Какие из следующих отношений являются отношениями порядка на этом множестве: 1) «x равно y»; 2) «x длиннее y»; 3) «x короче y на 2 см»; 4) «x длиннее y в 3 раза».

2. На множестве $X=\{3, 6, 9, 12, 15\}$ задано отношение «x — делитель y». Покажите, что это отношение упорядочивает множество X. Чем этот порядок отличается от того, который устанавливается в множестве X при помощи отношения «больше»?

3. Упорядочивает ли множество X (см. упр. 2) отношение «меньше или равно»? Постройте граф этого отношения.

4. Упорядочивает ли множество натуральных чисел отношение «следовать за»? А отношение «непосредственно следовать за»?

5. M — множество окружностей на плоскости, R — отношение «окружность x лежит внутри окружности y». Упорядочивает ли данное отношение множество M?

6. Можно ли упорядочить множество прямых плоскости при помощи отношений: 1) «прямая x пересекает прямую y»; 2) «прямая x перпендикулярна прямой y»?

41. Понятие соответствия

Кроме отношений на множестве, часто приходится рассматривать отношения между элементами двух множеств. Такие отношения называют **соответствиями.** Например, в процессе измерения длин отрезков устанавливается соответствие между отрезками и действительными числами; с помощью координатной плоскости устанавливается соответствие между точками плоскости и парами действительных чисел.

По своей сути **соответствие между элементами двух множеств X и Y, так же как и отношение на множестве, представляет собой множество пар и является подмножеством декартова произведения множеств X и Y.**

Соответствия между конечными множествами наглядно представляются при помощи графов. Построим, например, граф соответствия «больше» между элементами множеств $X=\{3, 5, 7, 9\}$ и

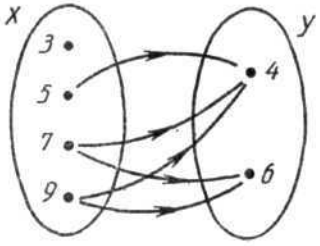


Рис. 70

$Y=\{4, 6\}$. Для этого обозначим элементы данных множеств точками и проведем стрелки от точек, изображающих элементы множества X, к точкам, изображающим элементы множества Y, при этом должно выполняться соответствие «больше». Так, стрелка должна идти от точки 5 к точке 4, поскольку 5 больше 4; должны быть стрелки, идущие от точки 7 к точкам 4 и 6, и т. д. В результате получаем граф соответствия «больше» между элементами множеств X и Y (рис. 70).

Соответствия между элементами числовых множеств X и Y представляют при помощи графика на координатной плоскости. Для этого изображают все пары чисел, находящихся в соответствии R, точками на координатной плоскости. Получившаяся при этом фигура и будет графиком соответствия R. Обратно: любое подмножество точек координатной плоскости считают графиком некоторого соответствия.

Построим, например, график соответствия «больше» между элементами множеств $X=\{3, 5, 7, 9\}$ и $Y=\{4, 6\}$. Запишем пары чисел, находящихся в заданном отношении: (5, 4), (7, 4), (7, 6), (9, 4), (9, 6). Изобразив элементы множества X на оси Ox, элементы множества Y на оси Oy, а каждую из получившихся пар точкой на координатной плоскости, получим график соответствия «больше» между элементами множеств X и Y (рис. 71).

Такое представление соответствия позволяет наглядно изображать их в тех ситуациях, когда в заданном соответствии находится бесконечное множество пар чисел.

Рассмотрим, например, соответствие «больше» между элементами множеств $X=\boldsymbol{R}$ и $Y=\{4, 6\}$ и построим его график.

В данном случае элементы множества X сплошь заполняют ось абсцисс, а множество Y состоит из двух элементов: 4 и 6. Так как для элементов множеств X и Y задано отношение «больше», установим, какие числа из множества X больше числа 4.

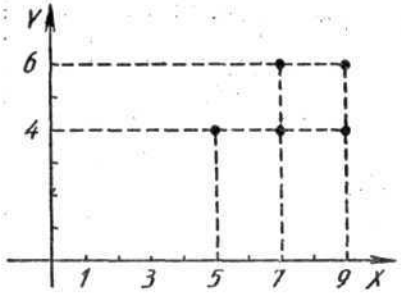


Рис. 71

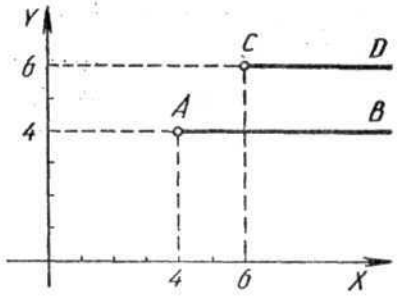


Рис. 72

Все числа, большие 4, располагаются на оси Ox вправо от точки, изображающей число 4. Значит, все точки, для которых абсцисса выбирается из промежутка $(4, \infty)$, а ордината равна 4, образуют луч AB (рис. 72). Этот луч не имеет начала, поскольку точка (4, 4) графику данного соответствия не принадлежит. Аналогично все точки, для которых абсцисса выбирается из промежутка $(6, \infty)$, а ордината равна 6, образуют луч CD.

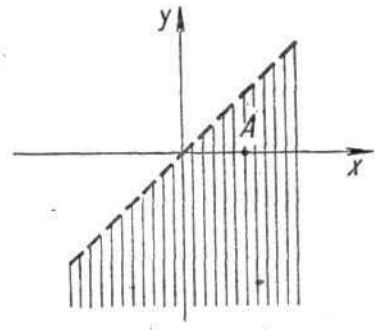


Рис. 73

Таким образом, графиком соответствия «больше» между множествами $X=\boldsymbol{R}$ и $Y=\{4, 6\}$ являются лучи AB и CD, исключая точки A и C.

Заметим, что графики одного и того же соответствия «больше» для разных множеств различны. Чтобы еще раз убедиться в этом, построим график соответствия «больше» $(x>y)$, заданного на множестве $\boldsymbol{R}$ действительных чисел, т. е. в случае, когда $X=Y=\boldsymbol{R}$.

Все числа, у которых абсцисса равна ординате, располагаются на биссектрисе 1-го и 3-го координатных углов (на рис. 73 она показана штриховой линией). Все точки, у которых абсцисса больше ординаты, располагаются под биссектрисой. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять точку из этой области, например точку A (3, 0).

Таким образом, графиком соответствия «больше», заданного на множестве $\boldsymbol{R}$ действительных чисел, является полуплоскость, расположенная под биссектрисой 1-го и 3-го координатных углов, сама биссектриса этой полуплоскости не принадлежит.

Упражнения

1. Таблица (рис. 74) представляет собой график дежурства по комнате девушек, живущих в общежитии. Соответствие между какими множествами устанавливает эта таблица? Что представляет

Дни недели / Ф.И.	Пн.	Вт.	Ср.	Чтв.	Птн.	Сб.	Вс.
Иванова О.							
Новикова Т.							
Петрова Е.							
Орлова Н.							

Рис. 74

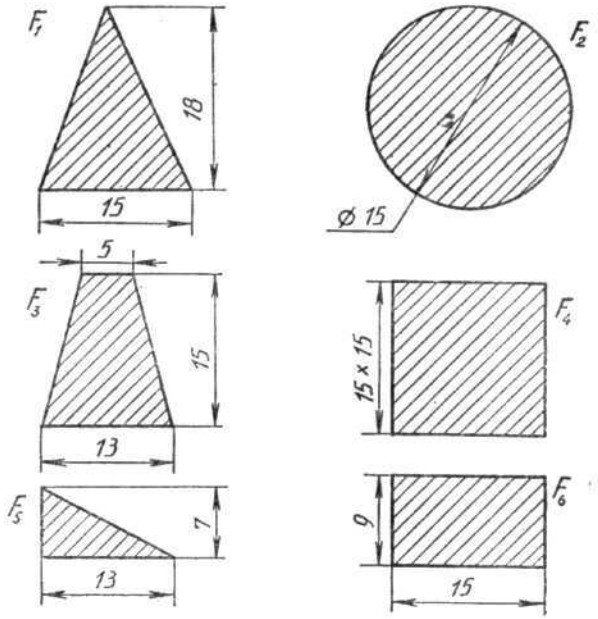


Рис. 75

собой каждая упорядоченная пара, принадлежащая данному соответствию? Можно ли задать другое соответствие между данными множествами? Как это сделать?

2. Учащийся заплатил за книгу 70 к., за тетрадь 3 к., за карандаш 5 к., за кисточку 6 к., за резинку 4 к. Соответствие между какими двумя множествами при этом установлено?

3. Вычислите площади фигур, изображенных на рисунке 75. Соответствие между какими множествами установлено? Постройте граф этого соответствия, обозначив каждую фигуру точкой F_1, F_2, ..., F_6.

4. На рисунке 76 изображен граф соответствия P. Запишите все пары чисел, находящихся в этом отношении. Установите между данными множествами A и B два других соответствия.

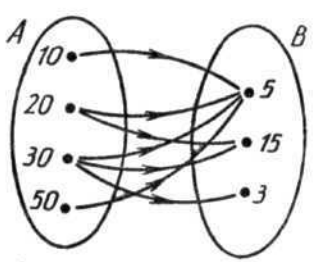


Рис. 76

5. Даны множества: $M=\{-1, 1, -2, 2, -3, 3, 0, -4, 4\}$ и $\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел. Соответствие R между элементами этих множеств — «квадрат числа m равен числу n», причем $m \in M$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Запишите множество пар, находящихся в заданном соответствии. Верно ли, что: 1) $(-3, 9) \in R$; 2) $(0, 0) \in R$; 3) $(-4, 16) \in R$?

6. Соответствие «меньше» задано между элементами множеств $A=\{1, 2, 4, 6\}$ и $B=\{5, 7\}$. Постройте график этого соответствия. Каким будет график соответствия «меньше на 1» между элементами тех же множеств?

7. Элементы множеств $X=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и $Y=\boldsymbol{Z}$ находятся в соответствии «число x меньше числа y на 3», $x \in X$, $y \in Y$. Какой из нижеприведенных графиков (рис. 77) является графиком данного соответствия?

8. На рисунке 78 приведен график соответствия между множествами X и Y. Сколько пар чисел находится в заданном соответствии? Принадлежат ли множеству X числа 2; 0; 2,7; $-1,5$, а множеству Y числа 4; 0; -1; 0,5? Находятся ли в заданном соответствии пары чисел $(0, 0)$, $(-1, 4)$, $(-2, -4)$?

9. Графиком соответствия P, заданного между множествами X и Y, является прямоугольник $ABCD$ (рис. 79). Назовите координаты трех точек, принадлежащих этому графику. Укажите характеристическое свойство чисел, принадлежащих множествам X и Y.

10. Даны множества $X=\{2, 5\}$ и $Y=\{3, 6\}$. Перечислите элементы декартова произведения данных множеств и образуйте все подмножества полученного множества. Какое из подмножеств задает соответствие: 1) «больше»; 2) «меньше»; 3) «больше или равно»?

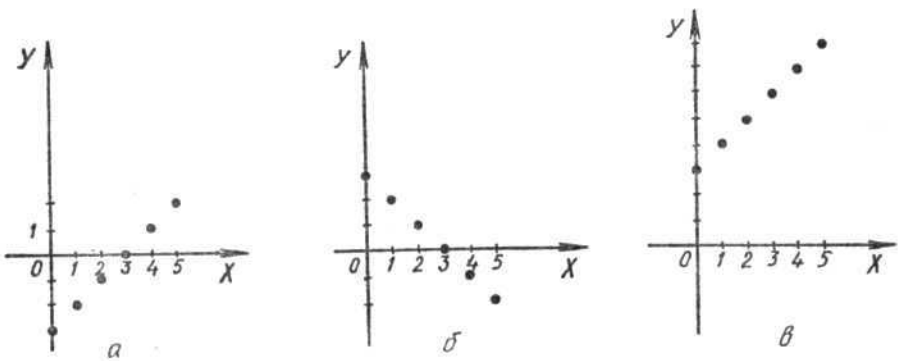


Рис. 77

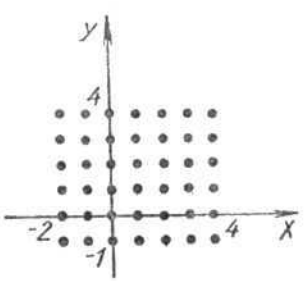


Рис. 78

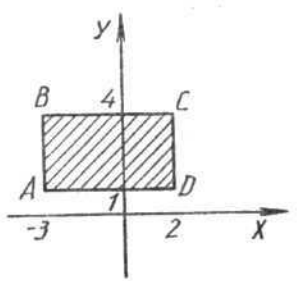


Рис. 79

11. Приведите примеры заданий из начального курса математики, при выполнении которых рассматриваются соответствия между:

1) множеством отрезков и множеством натуральных чисел;

2) множеством прямоугольников и множеством натуральных чисел;

3) множеством уравнений и множеством натуральных чисел.

42. Соответствие, обратное данному

Пусть R — соответствие «больше» между элементами множеств $X=\{3, 5, 7\}$ и $Y=\{4, 6\}$. Тогда $R=\{(5, 4), (7, 4), (7, 6)\}$ и граф этого отношения будет таким, как на рисунке 80, *а*.

Заменим направление стрелок этого графа на обратное. Получим граф нового соответствия «меньше» (рис. 80,*б*), которое рассматривается между множествами Y и X и определяется множеством пар $\{(4, 5), (4, 7), (6, 7)\}$.

Соответствие, граф которого изображен на рисунке 80,*б*, называется соответствием, обратным данному соответствию R, и обозначается символом R^{-1}.

В общем виде соответствие, обратное данному соответствию R, определяют так:

Определение. **Пусть R — соответствие между элементами множеств X и Y. Соответствие R^{-1} между элементами множеств Y и X называется обратным данному, если $y\ R^{-1}x$ тогда и только тогда, когда xRy.**

Соответствия R и R^{-1} называют взаимно обратными. Выясним, каковы особенности графиков взаимно обратных соответствий.

Построим график соответствия $R=\{(5, 4), (7, 4), (7, 6)\}$ (рис. 81). При построении графика соответствия $R^{-1}=\{(4, 5), (4, 7), (6, 7)\}$ мы должны первую компоненту пары выбирать из множества Y, а вторую — из множества X. В результате график соответствия R^{-1} совпадает с графиком соответствия R, а это не очень удобно. Чтобы различать графики соответствий R и R^{-1}, условились первую компоненту пары соответствия R^{-1} считать абсциссой, а вторую — ординатой. Например, если $(5, 4)\in R$, то $(4, 5)\in R^{-1}$. Точки с координатами (5, 4) и (4, 5), а в общем случае (x, y) и (y, x) симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов. Следовательно, **график соответствия R^{-1}, обратного соответствию R, состоит из точек, симметричных точкам графика соответствия R относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.**

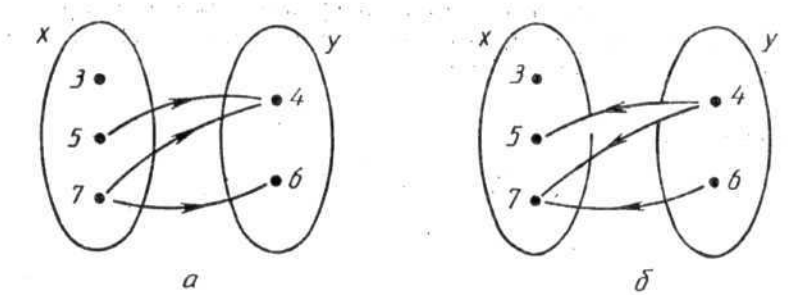


Рис. 80

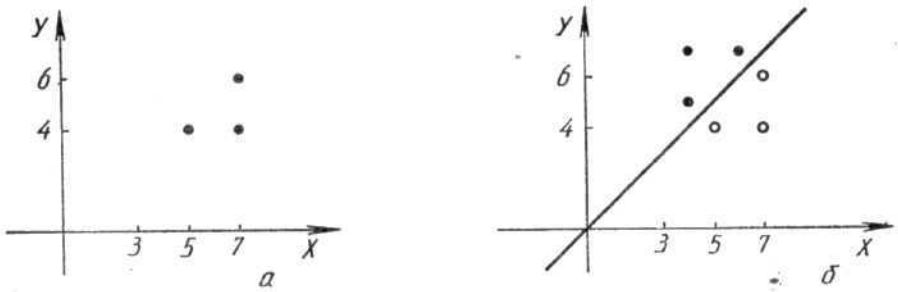


Рис. 81

Поэтому графиком соответствия $R^{-1}=\{(4, 5), (4, 7), (6, 7)\}$ будет множество точек, изображенных на рисунке 81,*б*.

Если R — отношение между элементами одного множества, то отношение R^{-1}, обратное данному, определяется также, как и для соответствий, т. е. пара элементов (y, x) только тогда находится в отношении R^{-1}, когда пара (x, y) находится в отношении R.

Например, если R — отношение «x меньше y», заданное на множестве натуральных чисел, то обратным ему будет отношение «y больше x». Для отношения между отрезками «x длиннее y» обратным будет «y короче x».

В начальном обучении математике взаимно обратным отношениям уделяется много внимания. Учащиеся должны хорошо понимать, что если $5>3$, то $3<5$, если отрезок AB короче отрезка CD, то отрезок CD длиннее отрезка AB. Особую роль играет знание взаимосвязи между отношениями при решении текстовых задач. Например, учащийся правильно решит задачу «Стол стоит 15 р., это в 10 раз дешевле шкафа. Сколько стоят стол и шкаф вместе?» только при условии понимания того факта, что если стол дешевле шкафа в 10 раз, то шкаф дороже стола в 10 раз.

Упражнения

1. Множество $P=\{(1, 1), (3, 0), (3, 1), (4, 0), (4, 1), (6, 1)\}$ представляет собой соответствие между элементами множеств $X=\{1, 3, 4, 6\}$ и $Y=\{0, 1\}$. Задайте соответствие P^{-1}, обратное соответствию P, и постройте в одной системе координат графики соответствий P и P^{-1}

2. На множестве $X=\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ задано отношение T —

«число x меньше числа y на 2». Задайте отношение T^{-1} и постройте его график на координатной плоскости.

3. Между множеством X — углов треугольника ABC и множеством Y — сторон в нем задано соответствие P — «угол x лежит против стороны y». Задайте соответствие P^{-1}, обратное соответствию P, при помощи: 1) предложения с двумя переменными; 2) графа.

4. Даны графики соответствий R и Q (рис. 82). Можно ли утверждать, что соответствия R и Q взаимно обратные?

5. Постройте графики соответствий, обратных данным (рис. 83).

6. На множестве отрезков рассматриваются отношения «длиннее», «длиннее в 3 раза», «длиннее на 5 см». Как задать отношения, обратные данным?

7. Нижеприведенные задачи взяты из учебников математики для начальных классов. Решите их и объясните, какие отношения рассматривались в процессе решения:

1) Длина карандаша 15 см. Он на 1 см длиннее ручки. Чему равна длина ручки?

2) В парке 8 голубых елок. Их на 2 меньше, чем берез. Сколько берез в парке?

3) Самолетов 6, их в 2 раза больше, чем вертолетов. Во сколько раз меньше вертолетов, чем самолетов? Сколько вертолетов?

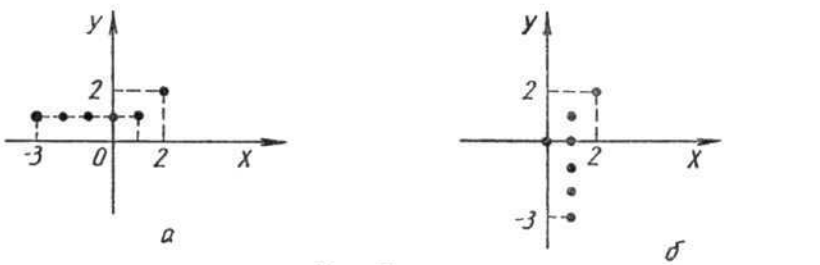


Рис. 82

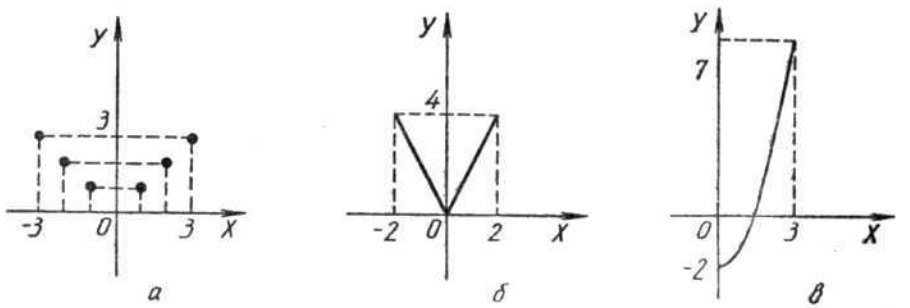


Рис. 83

4) Начерти два отрезка: длина первого 6 см, он в 2 раза длиннее второго. Чему равна длина второго отрезка?

5) Кухонный стол стоит 24 р., в 6 раз дороже, чем табуретка. Сколько стоит табуретка?

43. Взаимно однозначные соответствия

Из всевозможных соответствий, которые можно установить между элементами двух множеств X и Y, нас будут в первую очередь интересовать такие, при которых каждому элементу множества X соответствует единственный элемент множества Y, и каждый элемент множества Y соответствует только одному элементу из множества X. Такие соответствия называют **взаимно однозначными.**

Рассмотрим примеры таких соответствий.

1. Пусть $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$. Соответствие между элементами этих множеств установлено при помощи графа (рис. 84). Так как каждому элементу множества A (из каждой точки, изображающей элементы множества A, выходит стрелка) соответствует единственное число из множества B ($a \to 1$, $b \to 2$, $c \to 3$, $d \to 4$) и каждое число множества B соответствует только одному элементу множества A, то данное соответствие между множествами A и B взаимно однозначное.

2. Пусть X — множество точек координатной прямой, а $Y=\boldsymbol{R}$. Так как с введением координат на прямой каждой точке сопоставляется единственное число (координата этой точки) и каждое действительное число сопоставляется единственной точке этой прямой (имеющей это число своей координатой), то установленное соответствие взаимно однозначное.

3. Пусть X — множество точек координатной плоскости, а Y — множество пар действительных чисел. Если каждой точке плоскости сопоставляется единственная пара действительных чисел (координаты этой точки) и каждая пара действительных чисел сопоставляется единственной точке этой плоскости (имеющей эту пару чисел своими координатами), то соответствие между множествами точек координатной плоскости и множеством пар действительных чисел взаимно однозначное.

Понятие взаимно однозначного соответствия в начальном курсе математики используется неявно; на нем основан процесс счета и сравнение чисел. Так, чтобы объяснить запись $3=3$, берут три красных квадрата и три зеленых и каждому красному квадрату ставят в соответствие единственный зеленый (на практике квадраты прикладывают друг к другу, накладывают, соединяют отрезками и т. д.), т. е. устанавливают взаимно однозначное соответствие между

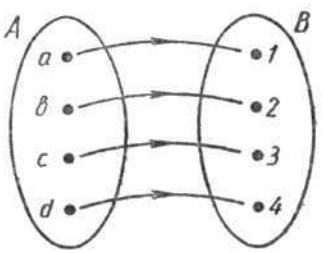


Рис. 84

этими множествами квадратов. Чтобы показать, что $3<4$, устанавливают взаимно однозначное соответствие между множеством, в котором три элемента, и трехэлементным подмножеством множества, содержащего четыре элемента.

Упражнения

1. Между множествами $A=\{x, y, z, t\}$ и $B=\{a, b, c, d\}$ установлены различные соответствия (рис. 85). Какие из них являются взаимно однозначными?

2. Даны множества $X=\{k, l, m, n, p\}$ и $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Установите три различных взаимно однозначных соответствия между данными множествами. Сколько всего таких соответствий можно установить между множествами X и Y?

3. Даны два множества $A=\{1, 2, 5\}$ и $B=\{3, 7\}$. Найдите множества $A\times B$ и $B\times A$. Можно ли каким-либо образом установить взаимно однозначное соответствие между ними?

4. $\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел, Y — множество квадратов натуральных чисел. Покажите, что между множествами $\boldsymbol{N}$ и Y можно установить взаимно однозначное соответствие.

5. M — множество геометрических фигур, изображенных на рисунке 86, $\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел. Поставим в соответствие каждой фигуре число — значение ее площади. Будет ли это

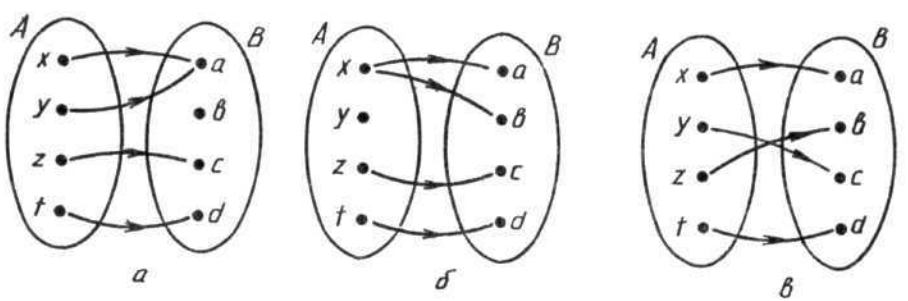


Рис. 85

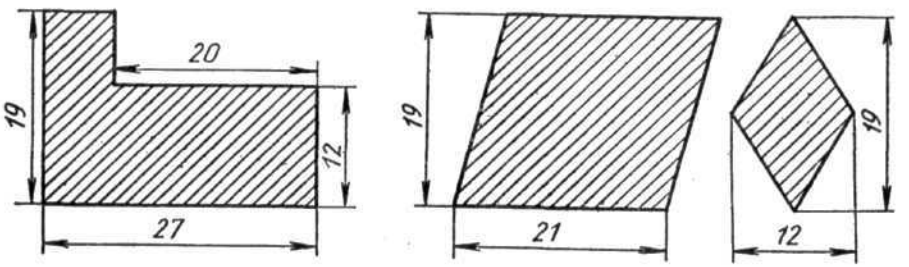


Рис. 86

соответствие взаимно однозначным соответствием между множествами M и $\boldsymbol{R}$?

6. Приведите примеры заданий из учебников математики для начальных классов, при выполнении которых неявно используется понятие взаимно однозначного соответствия между множествами.

44. Равномощные множества

Два множества могут находиться в различных отношениях: они могут пересекаться, могут не пересекаться, могут быть равными, одно может быть подмножеством другого.

Понятие взаимно однозначного соответствия между множествами позволяет ввести еще одно отношение между множествами — отношение равномощности.

Множества X и Y считают равномощными, если между ними существует взаимно однозначное соответствие.

Предложение «Множество X равномощно множеству Y» записывают кратко: $X\sim Y$.

Например, если $X=\{a, b, c, d, e\}$, а $Y=\{x, y, z, t, p\}$, то $X\sim Y$, так как между множествами X и Y можно установить взаимно однозначное соответствие.

Отношение равномощности множеств обладает рядом свойств.

1. Оно рефлексивно, т. е. каждое множество равномощно самому себе: $X\sim X$.
2. Оно симметрично, т. е. $X\sim Y\Rightarrow Y\sim X$.
3. Оно транзитивно, т. е. $X\sim Y$ и $Y\sim Z\Rightarrow X\sim Z$.

Так как отношение равномощности множеств рефлексивно, симметрично и транзитивно, то оно является отношением эквивалентности.

Равномощными могут быть как конечные, так и бесконечные множества.

Если множества X и Y конечны и между ними установлено взаимно однозначное соответствие, то говорят, что данные множества содержат поровну элементов, или что они равночисленны, или что в множестве X столько же элементов, сколько их в множестве Y.

Рассмотрим два бесконечных множества: множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел и множество Y четных натуральных чисел. Поставим в соответствие натуральному числу n четное число $2n$ (рис. 87). Это соответствие взаимно однозначное: каждому натуральному числу соответствует единственное четное число и каждое четное число соответствует единственному натуральному числу. Значит, $\boldsymbol{N}\sim Y$, т. е. множество натуральных чисел и его подмножество четных чисел равномощны.

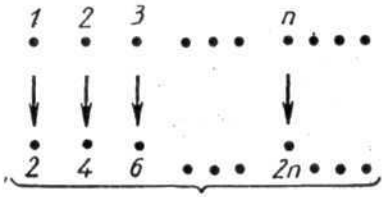


Рис. 87

Аналогично можно показать, что множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел рав-

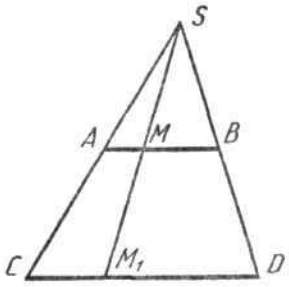


Рис. 88

номощно подмножеству нечетных чисел.

Полученные факты отражают особые свойства бесконечных множеств. В мире бесконечного изменяются привычные отношения целого и части. Здесь, оказывается, часть множества может быть равномощна всему множеству.

Чтобы еще раз в этом убедиться, докажем, что множество точек отрезка AB равномощно множеству точек отрезка CD (рис. 88). Отрезки AB и CD имеют различную длину.

Через точки A и C, B и D проведем прямые до пересечения их в точке S. Соответствие между множествами точек отрезков AB и CD установим следующим образом: точке M отрезка AB поставим в соответствие такую точку M_1 отрезка CD, которая лежит с точкой M на прямой SM. Нетрудно убедиться в том, что установленное соответствие взаимно однозначное. Значит, множество точек отрезка CD равномощно множеству точек отрезка AB.

Не надо думать, что все бесконечные множества равномощны между собой. Например, не равномощны множество натуральных чисел и множество точек на прямой[1].

Упражнения

1. Приведите примеры трех множеств, равномощных множеству $X=\{a, b, c\}$.

2. Докажите, что: 1) $X \sim X$; 2) $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$; 3) $X \sim Y$ и $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$.

3. Сформулируйте свойства отношения равенства множеств. Является ли оно отношением эквивалентности?

4. Какими свойствами обладает отношение включения для множеств? Верно ли, что оно является отношением порядка?

5. Докажите, что множество четных натуральных чисел и множество нечетных натуральных чисел равномощны.

6. Равномощно ли множество натуральных чисел, кратных 5, множеству N натуральных чисел?

7. Выделите из множества N натуральных чисел три подмножества, равномощных множеству N.

8. Докажите, что множества, о которых идет речь в следующих задачах, равномощны: 1) Запиши все двузначные числа, которые меньше чем 20. Увеличь каждое из них в 5 раз. 2) Запиши все четные однозначные числа и увеличь каждое из них в 3 раза. Какие получились числа: четные или нечетные?

9. Покажите с помощью рисунка, что решение каждой из задач связано с выделением равномощных множеств: 1) В одном цехе 10 станков, а в другом — на 4 станка больше. Сколько станков в другом цехе? 2) У Маши 9 маков, а у Риты на 2 меньше. Сколько маков у Риты? 3) Юннаты вырастили 15 цыплят, а утят в 3 раза меньше. Сколько утят они вырастили? 4) Для детского сада купили 4 зеленых мяча, а красных в 3 раза больше, чем зеленых. Сколько красных мячей купили детям?

[1] О свойствах бесконечных множеств можно прочитать в книге: Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах.— М., 1969.

Глава II

ЦЕЛЫЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 7. ПОНЯТИЕ ЧИСЛА

45. Об истории возникновения понятий натурального числа и нуля

Числа 1, 2, 3, 4, ... называются **натуральными.**

Понятие натурального числа является одним из основных понятий математики. Возникло оно, как и вся наука математика, из потребностей практической деятельности людей. Складывалось оно постепенно в процессе решения все усложняющихся задач сначала практического, а затем и теоретического характера. Причиной, которая привела человека к созданию натуральных чисел, является необходимость сравнивать различные конечные множества между собой.

В своем развитии понятие натурального числа прошло несколько этапов. В глубокой древности, чтобы сравнить конечные множества, устанавливали взаимно однозначное соответствие между данными множествами или между одним из множеств и подмножеством другого множества, т. е. на этом этапе человек воспринимал численность множества предметов без счета их. Например, о численности группы из пяти предметов он говорил: «Столько же, сколько пальцев на руке»; о множестве из двадцати предметов: «Столько же, сколько пальцев у человека». Такой метод обладал тем недостатком, что сравниваемые множества должны быть одновременно обозримы.

В результате очень долгого периода развития человек пришел к следующему этапу создания натуральных чисел — для сравнения множеств стали применять множества-посредники: мелкие камешки, раковины, пальцы. Эти множества-посредники уже представляли собой зачатки понятия натурального числа, хотя и на этом этапе число не отделялось от сосчитываемых множеств: речь шла о пяти камешках, пяти пальцах, а не о числе вообще. Названия множеств-посредников стали использовать для определения численности множеств, которые с ними сравнивались. Так, у некоторых племен численность множества, состоящего из пяти элементов, обозначалась словом «рука», а численность множества из 20 предметов — словами «весь человек».

Только после того как человек научился оперировать множествами-посредниками, установил то общее, что существует, например,

между пятью пальцами и пятью яблоками, т. е. когда произошло отвлечение от природы элементов множеств-посредников, возникло представление о натуральном числе. На этом этапе при счете, например, яблок перечислялись уже не одно яблоко, два яблока и т. д., а проговаривали слова «один», «два», «три» и т. д. Это был важнейший этап в развитии понятия числа. Вот как об этом говорил крупнейший математик современности Н. Н. Лузин: «Мы должны склониться перед гением Человека, создавшего (не открывшего, а именно создавшего) понятие единицы. Возникло Число, а вместе с ним возникла Математика. Идея Числа — вот с чего начиналась история величайшей из наук»[1].

Со временем люди научились не только называть числа, но и обозначать их, а также выполнять над ними действия. Многие трудности в решении этих проблем были преодолены с созданием в Древней Индии десятичной системы записи чисел и понятия нуля. Постепенно сложилось и представление о бесконечности множества натуральных чисел.

После того как понятие натурального числа сформировалось, числа стали самостоятельными объектами и появилась возможность изучать их как математические объекты. Наука, которая стала изучать числа и действия над ними, получила название «арифметика»[2].

Арифметика возникла в странах Древнего Востока: Вавилоне, Китае, Индии, Египте. Накопленные в этих странах математические знания были развиты и продолжены учеными Древней Греции. В средние века большой вклад в развитие арифметики внесли математики Индии, стран арабского мира и Средней Азии, а начиная с XIII века — европейские ученые[3].

Термин «натуральное число» впервые употребил римский ученый А. Боэций (ок. 480—524 гг.).

В настоящее время свойства натуральных чисел, действия над ними изучаются разделом математики, носящим название «теория чисел».

В XIX веке внимание ученых было обращено на построение и логическое обоснование математических теорий натурального числа, т. е. тех теорий, которые лежат в основе вычислений с натуральными числами.

46. Порядковые и количественные натуральные числа. Счет

Как вам известно, натуральными числами называются числа, которые употребляются при счете предметов.

[1] Моисеев Н. Н. Математика ставит эксперимент.— М., 1979.— С. 12.

[2] Слово «арифметика» происходит от греческого arithmos, что значит «число». Следовательно, арифметика — это наука о числе.

[3] Подробнее о развитии арифметики можно прочитать, например, в книгах: Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А. П. Савин.— М., 1985. С. 26—29; Депман И. Я. История арифметики.— М., 1965 (и др. издания)

А что представляет собой процесс счета? Как мы, например, должны вести счет элементов множества $A=\{k, l, m, r\}$? Указывая на каждый элемент этого множества, мы говорим: «первый», «второй», «третий», «четвертый». И на этом процесс счета заканчивается, так как использованы все элементы множества A. Ведя счет, мы соблюдаем ряд правил: первым при счете может быть указан любой элемент множества A, но ни один элемент не должен быть пропущен и сосчитан дважды.

Сосчитав элементы множества A, мы говорим, что в множестве A **четыре** элемента, т. е. получаем количественную характеристику этого множества. Но чтобы ее получить, мы использовали **порядковые натуральные числа** «первый», «второй», «третий», «четвертый». Другими словами, мы использовали множество {1, 2, 3, 4}, которое называют отрезком натурального ряда.

Определение. **Отрезком N_a натурального ряда называется множество натуральных чисел, не превосходящих натурального числа a.**

Например, отрезок N_4 есть множество натуральных чисел 1, 2, 3, 4.

Из определения вытекает, что отрезок N_a натурального ряда состоит из всех таких натуральных чисел x, что $x \leqslant a$. Кроме того, любой отрезок N_a при $a>1$ содержит 1.

Введенное определение отрезка натурального ряда позволяет уточнить понятие счета элементов множества. Но прежде заметим, что в процессе счета элементов множества $A=\{k, l, m, r\}$ каждому элементу этого множества было поставлено единственное число из отрезка N_4, т. е. было установлено взаимно однозначное соответствие между множеством A и отрезком N_4 натурального ряда.

Определение. **Счетом элементов множества A называется установление взаимно однозначного соответствия между множеством A и отрезком натурального ряда N_a.**

Число a называют **числом элементов** в множестве A и пишут: $n(A)=a$. Это число a единственное и является **количественным натуральным числом.**

Таким образом, при пересчете элементы конечного множества A не только расставляются в определенном порядке (при этом используются порядковые натуральные числа, выражаемые числительными «первый», «второй», «третий» и т. д.), но и устанавливается также, сколько элементов содержит множество A (при этом используются количественные натуральные числа, выражаемые числительными «один», «два», «три» и т. д.).

Анализ сущности счета показывает — для того чтобы считать, необходимо заранее иметь достаточный запас чисел, причем числа должны обладать рядом свойств: располагаться в определенном порядке, должно существовать первое число и т. д.

Тесная связь порядкового и количественного числа нашла отражение и в начальном обучении математике. С этими сторонами числа учащиеся знакомятся уже при изучении чисел первого десят-

ка. Происходит это при счете элементов различных множеств. Ответ на вопрос: «Сколько предметов содержит данное множество?» — выражается количественным натуральным числом, а порядковое число указывает, какое место при счете занимает тот или иной предмет, и отвечает на вопрос: «Которым по счету будет данный предмет?»

Упражнения

1. Запишите все элементы множеств N_8, N_{10}. Как называются эти множества?

2. Можно ли назвать отрезком натурального ряда множество: 1) {0, 1, 2, 3}; 2) {1, 3, 5, 7}; 3) {1, 2, 3}; 4) {3, 4, 5}?

3. Сформулируйте условия, которые необходимо соблюдать, ведя счет элементов конечного множества.

4. Прочитайте предложения: $n(A)=7$, $n(B)=2$. В какой роли здесь выступают натуральные числа 7 и 2? Придумайте множества A и B, удовлетворяющие данным условиям.

47. Теоретико-множественный смысл количественного натурального числа и нуля

В предыдущем пункте было установлено, что счет служит как для упорядочивания элементов конечного множества, так и для определения их количества и что в общем случае порядковое число ведет к количественному.

Смысл количественного числа можно истолковать иначе, с теоретико-множественных позиций, используя понятие равномощности множеств.

Возьмем какое-либо конечное множество A и отберем в один класс все равномощные ему множества. Так, если A — множество вершин треугольника, то в один класс с ним попадут, например, такие множества: множество сторон треугольника, множество букв в слове «мир» и т. д.

Взяв какое-нибудь другое конечное множество B, неравномощное A, отберем все множества, равномощные B. В результате получим новый класс конечных множеств.

Если продолжить этот процесс, то, в силу того, что отношение равномощности есть отношение эквивалентности, все конечные множества окажутся распределенными по классам эквивалентности, причем любые два множества одного класса будут равномощными, а любые два множества различных классов — неравномощными.

Что общего у всех множеств одного и того же класса? Они имеют одинаковую мощность. Это общее свойство всех множеств одного класса эквивалентности и считают натуральным числом. Например, общее свойство множеств, равномощных множеству вершин треугольника, есть натуральное число «три», а общее свойство множеств, равномощных множеству сторон прямоугольника, есть натуральное число «четыре».

Таким образом, с теоретико-множественных позиций **количественное натуральное число есть общее свойство класса конечных равномощных множеств.**

Каждому классу соответствует одно и только одно натуральное число, каждому натуральному числу — один и только один класс равномощных конечных множеств.

Как известно, каждый класс эквивалентности однозначно определяется заданием любого принадлежащего ему элемента — представителя этого класса. Значит, и каждый класс равномощных множеств можно задать, указав его представителя. Например, класс множеств, равномощных множеству вершин треугольника и определяющий натуральное число «три» можно задать, указав множество $A=\{k, l, m\}$. Следовательно, множество A определяет натуральное число «три».

Вообще каждому конечному множеству A соответствует одно и только одно натуральное число $a=n(A)$, но каждому натуральному числу a соответствуют различные равномощные множества одного класса эквивалентности. Поэтому числу «пять» будет соответствовать и множество сторон пятиугольника, и множество его вершин, и множество букв в слове «танец» и др.

Число «нуль» также имеет теоретико-множественное истолкование — оно ставится в соответствие пустому множеству: $0=n(\varnothing)$.

В начальном курсе математики количественное натуральное число рассматривается как общее свойство класса конечных равномощных множеств. Поэтому, когда учащиеся изучают число «один», на странице учебника приводятся изображения одного предмета: одно ведро, одна девочка, один стол и т. д.; когда изучают число «три», на странице учебника приводятся изображения различных совокупностей, содержащих три элемента: три кубика, три камешка, три палочки и т. д. Так происходит при изучении всех чисел первого десятка, но число элементов в множестве определяется путем пересчета. Таким образом, количественное и порядковое натуральное число выступает в начальном обучении в тесной взаимосвязи, в единстве.

Упражнения

1. Приведите примеры таких различных множеств A и B, что $n(A)=n(B)=7$. В каком отношении находятся множества A и B?

2. Каков теоретико-множественный смысл натурального числа «пять»?

3. Рассмотрите иллюстрации и записи, приведенные на той странице учебника по математике для I класса, где учащиеся изучают число «три». Объясните, какие из них приведены с целью раскрыть учащимся порядковое и количественное значение числа «три».

Какие бы Вы добавили иллюстрации с этой же целью?

4. Приведите примеры заданий из учебников математики для начальных классов, в которых число выступает как: 1) порядковое; 2) количественное.

§ 8. ПОНЯТИЕ ДЕЙСТВИЙ НАД ЦЕЛЫМИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

48. Сложение

Рассмотрим задачу, которую решают первоклассники: «Петя нашел 4 гриба, а Нина — 3. Сколько всего грибов нашли ребята?» Задача решается при помощи действия сложения: $4+3=7$. Но как объяснить, почему использовано сложение, а не другое действие?

Представим условие задачи наглядно, изобразив каждый гриб, который нашел Петя, кружком, а каждый гриб, найденный Ниной, квадратом (рис. 89). Чтобы ответить на вопрос задачи, надо к грибам Пети добавить (присоединить) грибы Нины, т. е. объединить два множества грибов (рис. 90), и сосчитать, сколько в этом объединении оказалось элементов. Видим, что сложение целых неотрицательных чисел оказывается тесно связанным с операцией объединения множеств.

Рассмотрим еще одну задачу. Найдем число элементов в объединении множеств $A=\{a, b, c, d\}$ и $B=\{c, x, y\}$. Нетрудно установить, что $n(A)=4$, $n(B)=3$, $A\cup B=\{a, b, c, d, x, y\}$, но $n(A\cup B)\neq 4+3$. Почему так?

Дело в том, что множества A и B в этой задаче пересекаются, и, значит, число элементов в их объединении не совпадает с суммой $n(A)+n(B)$.

Поэтому сумму целых неотрицательных чисел определяют через объединение непересекающихся множеств.

Определение. **Суммой целых неотрицательных чисел a и b называют число элементов в объединении непересекающихся множеств A и B, таких, что $n(A)=a$, $n(B)=b$:**

$$a+b=n(A\cup B),$$
где $n(A)=a$, $n(B)=b$ и $A\cap B=\varnothing$

Пример. Объясним, пользуясь данным определением, что $5+2=7$. 5 — это число элементов некоторого множества A, 2 — число элементов некоторого множества B, причем их пересечение должно быть пусто. Возьмем, например, множества $A=\{x, y, z, t, p\}$, $B=\{a, b\}$. Объединим их: $A\cup B=\{x, y, z, t, p, a, b\}$. Путем пересчета устанавливаем, что $n(A\cup B)=7$. Следовательно, $5+2=7$.

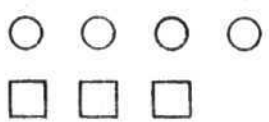


Рис. 89

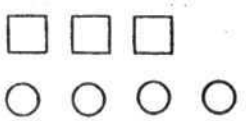


Рис. 90

В связи с рассмотренным примером может возникнуть вопрос: а не зависит ли сумма чисел 5 и 2 от выбора непересекающихся множеств A и B, таких, что $n(A)=5$, $n(B)=2$? Иными словами, если взять другие непересекающиеся множества A_1 и B_1, но удовлетворяющие условию $n(A_1)=5$ и $n(B_1)=2$, то не изменится ли сумма $5+2$? По всей видимости, нет.

Вообще сумма $a+b$ не зависит от выбора непересекающихся множеств A и B, таких, что $n(A)=a$, $n(B)=b$. Это общее утверждение мы примем без доказательства.

Кроме того, сумма целых неотрицательных чисел всегда существует и единственна. Другими словами, какие бы два целых неотрицательных числа a и b мы ни взяли, всегда можно найти их сумму — целое неотрицательное число c, оно будет единственным для данных чисел a и b. Существование и единственность суммы вытекают из существования и единственности объединения двух множеств.

Действие, при помощи которого находят сумму, называют сложением, а числа, которые складывают, называют слагаемыми.

Выше нами было дано определение суммы двух слагаемых. А как определить сумму нескольких слагаемых?

Пусть сумма двух слагаемых определена и определена сумма n слагаемых. Тогда сумма, состоящая из $n+1$ слагаемого, т. е. сумма $a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}$, равна $(a_1+a_2+\ldots+a_n)+a_{n+1}$.

Например, чтобы найти сумму $2+7+15+19$ согласно этому определению, надо выполнить следующие преобразования:

$$2+7+15+19=(2+7+15)+19=((2+7)+15)+19=$$
$$=(9+15)+19=24+19=43.$$

В начальном курсе математики сложение целых неотрицательных чисел вводится на основе практических упражнений, связанных с объединением двух множеств предметов (теоретико-множественная терминология и символика при этом не используются). Главным средством раскрытия теоретико-множественного смысла сложения является решение простых[1] арифметических задач. Суть решения одной такой задачи проанализирована в начале пункта.

Упражнения

1. Объясните, используя определение суммы целых неотрицательных чисел, что:

1) $4+1=5$; 2) $2+7=9$; 3) $1+5=6$; 4) $3+0=3$.

2. Как вы понимаете утверждение: «Сумма целых неотрицательных чисел существует и единственна»?

[1] Простыми задачами в методике обучения математике называются текстовые задачи, которые решаются при помощи одного действия.

3. Учащимся дается задание: «Составьте две задачи, которые решаются так: $16+4=20$». Можно ли составить три задачи по этому условию? пять задач? На основании какого теоретического положения это возможно?

4. Запишите число 1 в виде суммы двух целых неотрицательных чисел двумя способами.

5. Сколькими способами можно записать число 2 в виде суммы двух целых неотрицательных чисел?

6. Какие два числа можно сложить, чтобы получить в сумме число 3? Запишите все возможные случаи.

7. Как можно распределить 6 тетрадей между двумя учениками?

8. Как можно распределить 6 тетрадей между двумя учениками, если каждый из них должен получить хотя бы одну тетрадь? Чем отличается эта задача от задачи 7?

9. Используя определение суммы нескольких слагаемых, найдите значение выражения: 1) $13+6+18+34+29$; 2) $15+28+4+17+36+1$.

10. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются сложением:

1) По тропинке идут 4 утки и 6 гусей. Сколько всех птиц идет по тропинке?

2) В пакет положили 3 груши и 8 яблок. Сколько фруктов положили в пакет?

49. Законы сложения

Изложенный в предыдущем пункте подход к сложению целых неотрицательных чисел позволяет обосновать известные законы сложения: **переместительный и сочетательный.**

Докажем сначала переместительный закон, т. е. докажем, что **для любых целых неотрицательных чисел a и b выполняется равенство $a+b=b+a$.**

Пусть a — число элементов в множестве A, b — число элементов в множестве B и $A\cap B=\varnothing$. Тогда по определению суммы целых неотрицательных чисел $a+b$ есть число элементов объединения множеств A и B: $a+b=n(A\cup B)$. Но множество $A\cup B$ равно множеству $B\cup A$ согласно переместительному свойству объединения множеств, и, значит, $n(A\cup B)=n(B\cup A)$. По определению суммы $n(B\cup A)=b+a$, поэтому $a+b=b+a$ для любых целых неотрицательных чисел a и b.

Докажем теперь сочетательный закон, т. е. докажем, что **для любых целых неотрицательных чисел a, b, c выполняется равенство $(a+b)+c=a+(b+c)$.**

Пусть $a=n(A)$, $b=n(B)$, $c=n(C)$, причем $A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$. Тогда по определению суммы двух чисел можно записать $(a+b)+c=n(A\cup B)+n(C)=n((A\cup B)\cup C)$.

Так как объединение множеств подчиняется сочетательному

закону, то $n((A\cup B)\cup C)=n(A\cup(B\cup C))$. Откуда по определению суммы двух чисел имеем $n(A\cup(B\cup C))=n(A)+n(B\cup C)=a+(b+c)$. Следовательно, $(a+b)+c=a+(b+c)$ для любых целых неотрицательных чисел a, b и c.

Каково назначение сочетательного закона сложения? Он объясняет, как можно находить сумму трех слагаемых: для этого достаточно сложить первое слагаемое со вторым и к полученному числу прибавить третье слагаемое или прибавить первое слагаемое к сумме второго и третьего. Заметим, что сочетательный закон не предполагает перестановки слагаемых.

И переместительный и сочетательный законы сложения могут быть обобщены на любое число слагаемых. При этом переместительный закон будет означать, что сумма не изменяется при любой перестановке слагаемых, а сочетательный — что сумма не изменяется при любой группировке слагаемых (без изменения их порядка).

Из переместительного и сочетательного законов сложения вытекает, что сумма нескольких слагаемых не изменится, если их переставить любым способом и если любую их группу заключить в скобки.

Вычислим, используя законы сложения, значение выражения $109+36+191+64+27$.

На основании переместительного закона переставим слагаемые 36 и 191. Тогда $109+36+191+64+27=109+191+36+64+27$.

Воспользуемся сочетательным законом, сгруппировав слагаемые, а затем найдем суммы в скобках: $109+191+36+64+27=(109+191)+(36+64)+27=300+100+27$.

Применим еще раз сочетательный закон, заключив в скобки сумму чисел 300 и 100: $300+100+27=(300+100)+27$.

Произведем вычисления: $(300+100)+27=400+27=427$.

С переместительным свойством сложения учащиеся начальных классов знакомятся при изучении чисел первого десятка. Сначала оно используется при составлении таблицы сложения однозначных чисел, а затем для рационализации различных вычислений.

Сочетательный закон сложения в начальном курсе математики в явном виде не изучается, но постоянно используется. Так, он является основой приема прибавления числа по частям: $3+2=3+(1+1)=(3+1)+1=4+1=5$. Кроме того, в тех случаях, когда надо прибавить число к сумме, сумму к числу, сумму к сумме, сочетательный закон используется в сочетании с переместительным. Например, прибавлять сумму $2+1$ к числу 4 предлагается следующими способами:

1) $4+(2+1)=4+3=7$;
2) $4+(2+1)=6+1=7$;
3) $4+(2+1)=5+2=7$.

Проанализируем эти способы. В случае 1 вычисления выполнены в соответствии с указанным порядком действий. В случае 2 применено сочетательное свойство сложения. Вычисления же в последнем случае опираются на переместительный и сочетательный

законы сложения, причем промежуточные преобразования опущены. Они таковы. Сначала на основании переместительного закона переставили местами слагаемые 1 и 2: $4+(2+1)=4+(1+2)$. Затем воспользовались сочетательным законом: $4+(1+2)=(4+1)+2$. И, наконец, произвели вычисления согласно порядку действий $(4+1)+2=5+2=7$.

Упражнения

1. Выражение $(4+5)+6$ преобразуйте к виду $5+(4+6)$, используя законы сложения. Каждый шаг в преобразованиях обоснуйте.

2. Выражение $(7+2)+(3+8)$ преобразуйте к виду $(7+3)+(2+8)$, используя законы сложения.

3. Вычислите рациональным способом значение выражения и объясните, какие законы сложения были при этом использованы:
1) $(30+7)+(10+4)$;
2) $(16+9)+21+14$;
3) $1809+393+678+191+1607$.

4. Найдите значение суммы двумя способами: сначала используя определение суммы нескольких слагаемых, а затем законы сложения:
1) $273+1227+154+446$;
2) $372+4356+22+544$;
3) $871+2475+89+325$.

5. Проанализируйте содержание темы «Перестановка слагаемых» в учебнике по математике в начальных классах. На какой теоретической основе рассматривается здесь переместительное свойство сложения?

6. Является ли доказательством переместительного закона сложения такое рассуждение:
«$2+1=1+2$, $3+7=7+3$, $15+2=2+15$, следовательно, от перемены мест слагаемых сумма не изменяется»?

7. Решите задачу различными способами:
1) В колхозе было 8 грузовых машин и 2 легковые. Колхоз купил еще 2 машины. Сколько всего машин стало в колхозе?
2) У малышей детского сада было 20 красных мячей и 10 зеленых. Им подарили еще 8 мячей. Сколько мячей стало у малышей?

50. Отношения «равно» и «меньше»

Выясним, на какой теоретической основе происходит сравнение чисел.

Пусть даны два целых неотрицательных числа a и b. С теоретико-множественной точки зрения они представляют собой число элементов конечных множеств A и B: $a=n(A)$, $b=n(B)$. Если эти множества равномощны, то им соответствует одно и то же число, т. е. $a=b$. Приходим к определению:

Числа a и b равны, если они определяются равномощными множествами:

$$a=b \Leftrightarrow A \sim B, \text{ где } n(A)=a,\ n(B)=b.$$

Если множества A и B неравномощны, то числа, определяемые ими, различны.

В том случае, **если множество A равномощно собственному подмножеству множества B и $n(A)=a$, $n(B)=b$, говорят, что число a меньше числа b, и пишут: $a<b$. В этой же ситуации говорят, что b больше a, и пишут: $b>a$.**

$$a<b \Leftrightarrow A \sim B_1, \text{ где } B_1 \subset B \text{ и } B_1 \neq B,\ B_1 \neq \varnothing.$$

Из приведенных определений отношений «равно» и «меньше» исходят в начальной школе когда объясняют, что $2=2$, $3=3$, $2<3$, $3<4$ и т. д. Например, при введении записи $3=3$ рассматривают два равномощных множества квадратов и кругов (рис. 91). При изучении отношения $3<4$ проводятся рассуждения: возьмем три розовых кружка и 4 синих и каждый розовый наложим на синий, видим, что синий кружок остался незакрытым, значит, розовых кружков меньше, чем синих, поэтому можно записать: $3<4$.

Отметим еще, что если числа a и b определяются соответственно множествами A и B (кружков, квадратов, палочек и т. д.) и $a<b$, то выделение в множестве B собственного подмножества, равномощного множеству A, на практике происходит самыми различными способами: наложением, приложением, путем образования пар и т. д. Это возможно, так как отношение $a<b$ (так же как и отношение $a=b$) не зависит от выбора множеств A и B, таких, что $n(A)=a$, $n(B)=b$, важно только, чтобы A было равномощно собственному подмножеству множества B (а в случае равенства чисел A равномощно B).

Изложенный подход к определению отношения «меньше» имеет ограниченное применение, он может быть использован для сравнения чисел в пределах 20, поскольку связан с непосредственным сравнением двух групп предметов.

Как же можно еще сравнивать целые неотрицательные числа? Пусть $a<b$ в смысле данного выше определения. Тогда $a=n(A)$, $b=n(B)$ и $A \sim B_1$, где B_1 — собственное подмножество множества B (рис. 92). Так как $B_1 \subset B$, то B можно представить в виде объединения множества B_1 и его дополнения $B \setminus B_1$. Обозначим это дополнение B_1' (т. е. $B \setminus B_1 = B_1'$. Тогда $B = B_1 \cup B_1'$ и, следовательно, $n(B)=n(B_1 \cup B_1')$. По-

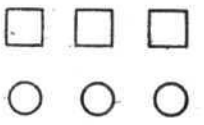


Рис. 91

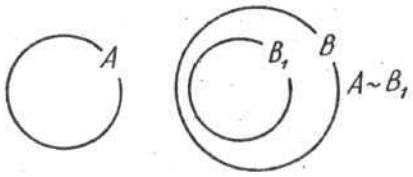


Рис. 92

скольку множества B_1 и B_1' не пересекаются, то по определению суммы $n(B)=n(B_1)+n(B_1')$ (*). Но по условию $B_1 \sim A$, значит, $n(B_1)=n(A)$. Если число элементов в множестве B_1' обозначить через c, то равенство (*) можно записать в виде $b=a+c$, т. е. из того, что $a<b$, следует, что $b=a+c$. Нетрудно убедиться и в справедливости обратного утверждения.

Пришли к другому определению отношения «меньше»:

Число a меньше числа b тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число c, что $a+c=b$.

Как, пользуясь этим определением, объяснить, что $3<7$? $3<7$, поскольку существует такое целое неотрицательное число 4, что $3+4=7$.

Этот способ определения отношения «меньше» через сложение также используется в начальном курсе математики. Об этом говорит наличие пар записей $5+1=6$, $6>5$; $7+1=8$, $7<8$.

Рассмотрим еще один способ сравнения чисел.

Пусть $a<b$. Тогда про любое натуральное число x можно сказать, что если $x \leqslant a$, то $x<b$. Это значит, что при $a<b$ отрезок натурального ряда N_a является собственным подмножеством отрезка N_b. Справедливо и обратное утверждение.

Таким образом, получаем еще одно определение отношения «меньше»:

Число a меньше числа b тогда и только тогда, когда отрезок натурального ряда N_a является собственным подмножеством отрезка этого ряда N_b:

$$a<b \Leftrightarrow N_a \subset N_b \text{ и } N_a \neq N_b.$$

Например, справедливость неравенства $3<7$ с этих позиций можно объяснить тем, что $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Данная трактовка понятия «меньше» позволяет сравнивать числа, опираясь на знание их места в натуральном ряду.

Этот способ сравнения чисел также используется в начальном обучении математике: число, которое при счете встречается раньше, всегда меньше числа, которое идет позднее.

Упражнения

1. Объясните тремя способами, почему: 1) $3<6$; 2) $0<5$.

2. Используя определение отношения «меньше» через сложение, докажите, что для любых натуральных чисел a, b, c справедливо утверждение: «Если $a<b$, то $a+c<b+c$».

3. Почему отношение «меньше» упорядочивает множество целых неотрицательных чисел, а отношение «непосредственно следовать за» нет?

4. Приведите примеры двух заданий из учебников математики для начальных классов, в которых отношение «меньше» («больше») рассматривается с теоретико-множественных позиций.

51. Вычитание

Рассмотрим задачу, которую решают первоклассники:

«Около школы посадили 8 деревьев — берез и рябин. Берез 3. Сколько рябин посадили около школы?»

Чтобы ответить на вопрос задачи, надо из 8 вычесть 3: $8-3=5$. Но как объяснить, почему здесь использовано вычитание чисел, а не другое действие? Представим условие задачи наглядно, изобразив каждое дерево, посаженное около школы, кружком (рис. 93).

Среди посаженных деревьев 3 березы — на рисунке выделим их, зачеркнув каждый кружок, изображающий березу. Тогда остальные деревья — рябины. Их столько, сколько будет, если из 8 вычесть 3, т. е. 5.

Видим, что решение данной задачи тесно связано с выделением из данного множества подмножества и нахождением числа элементов в дополнении этого подмножества, т. е. вычитание чисел оказывается связанным с операцией дополнения подмножества.

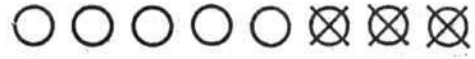
Определение. **Разностью целых неотрицательных чисел a и b называется число элементов в дополнении множества B до множества A при условии, что $n(A)=a$, $n(B)=b$ и $B \subset A$:**

$$a-b=n(A \setminus B), \text{ где } a=n(A),\ b=n(B),\ B \subset A.$$

Пример. Объясним, используя данное определение, что $7-4=3$. 7 — это число элементов некоторого множества A, 4 — число элементов множества B, которое является подмножеством множества A. Возьмем, например, множества $A=\{x, y, z, t, p, r, s\}$, $B=\{x, y, z, t\}$. Найдем дополнение множества B до множества A: $A \setminus B=\{p, r, s\}$. Получаем, что $n(A \setminus B)=3$. Следовательно, $7-4=3$.

Очевидно, в качестве таких множеств A и B, что $n(A)=7$, $n(B)=4$ и $B \subset A$, можно было выбрать множества, отличные от рассматриваемых, поскольку разность $a-b$ не зависит от выбора множеств A и B, удовлетворяющих условиям $n(A)=a$, $n(B)=b$ и $B \subset A$.

Но всегда ли существует разность целых неотрицательных чисел?


Рис. 93

Из того, что $B \subset A$, следует,

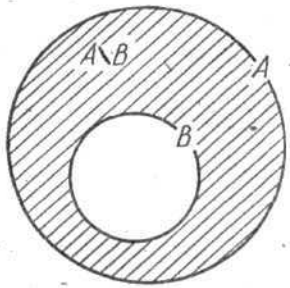


Рис. 94

что $n(B) \leqslant n(A)$. Значит, разность $a-b$ целых неотрицательных чисел a и b, таких, что $a=n(A)$, $b=n(B)$ и $B \subset A$, существует только тогда, когда $b \leqslant a$.

Действие, при помощи которого находят разность $a-b$, называется вычитанием, число a — уменьшаемым, число b — вычитаемым.

Часто, чтобы проверить правильность выполнения действия вычитания, мы обращаемся к сложению. Почему? Очевидно потому, что существует связь между действиями вычитания и сложения.

Пусть даны целые неотрицательные числа a и b, такие, что $a=n(A)$, $b=n(B)$ и $B \subset A$, и пусть разность этих чисел есть число элементов дополнения множества B до множества A, т. е. $a-b=n(A \backslash B)$.

На кругах Эйлера множества A, B, $A \backslash B$ изображаются так, как на рисунке 94. Известно, что $A=B \cup (A \backslash B)$, откуда $n(A)=n(B \cup (A \backslash B))$. Так как $B \cap (A \backslash B)=\varnothing$, то имеем $n(A)=n(B \cup (A \backslash B))=n(B)+n(A \backslash B)=b+(a-b)$. Следовательно, получаем, что $a=b+(a-b)$, т. е. разность $a-b$ есть такое число, сумма которого и числа b равна числу a.

Установленный факт дает возможность по-другому дать определение разности.

Определение. **Разностью целых неотрицательных чисел a и b называется такое целое неотрицательное число c, сумма которого и числа b равна a.**

Мы показали, что из определения разности целых неотрицательных чисел как числа элементов дополнения одного множества до другого вытекает ее определение через сумму. Можно доказать и обратное утверждение.

Таким образом, $\boxed{a-b=c \Leftrightarrow a=b+c}$.

Говорят, что действие вычитания является обратным сложению.

Докажем, исходя из второго определения разности, следующие теоремы:

Теорема. ***Разность целых неотрицательных чисел a и b существует тогда и только тогда, когда $b \leqslant a$.***

Доказательство. Если $a=b$, то $a-b=0$, и, следовательно, разность $a-b$ существует.

Если $b<a$, то по определению отношения «меньше» существует такое натуральное число c, что $a=b+c$. Тогда по определению разности $c=a-b$, т. е. разность $a-b$ существует.

Если разность $a-b$ существует, то по определению разности найдется такое целое неотрицательное число c, что $a=b+c$. Если

$c=0$, то $a=b$; если $c>0$, то $b<a$ по определению «меньше». Итак, $b \leqslant a$.

Теорема. ***Если разность целых неотрицательных чисел a и b существует, то она единственна.***

Доказательство. Предположим, что существуют два значения разности $a-b$: $a-b=c_1$ и $a-b=c_2$. Тогда по определению разности имеем $a=b+c_1$ и $a=b+c_2$. Отсюда следует $b+c_1=b+c_2$ и, значит, $c_1=c_2$.

В начальном курсе математики первоначально вычитание целых неотрицательных чисел рассматривается на основе практических упражнений, связанных с выделением подмножества данного множества и образованием нового множества — дополнения выделенного подмножества. При этом теоретико-множественная терминология и символика не используются. Главным средством раскрытия теоретико-множественного смысла вычитания является решение простых задач.

Суть решения одной такой задачи проанализирована в начале пункта.

Связь вычитания со сложением устанавливается при изучении темы «Как найти неизвестное слагаемое». Определение понятия вычитания как действия, обратного сложению, в явном виде не дается, но подчеркивается, что «вычитание связано со сложением: вычесть из числа 40 число 16 — значит найти такое число, которое при сложении его с числом 16 дает в сумме 40. Это число 24. Значит, $40-16=24$».

Упражнения

1. Дайте теоретико-множественное истолкование следующим равенствам: 1) $7-5=2$; 2) $3-3=0$; 3) $4-0=4$.

2. В учебнике по математике для начальной школы приведено правило: «Для проверки вычитания к разности прибавляют вычитаемое. Если решение правильное, то получится уменьшаемое». Каково теоретическое обоснование этого правила?

3. Приведите примеры двух заданий из учебников по математике для начальных классов, при выполнении которых используется условие существования разности целых неотрицательных чисел.

4. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются при помощи вычитания:

1) У пруда росло 9 осин. 4 осины спилили. Сколько осин осталось у пруда?

2) Вова и Лида нарисовали 9 домиков. Лида нарисовала 4 домика. Сколько домиков нарисовал Вова?

5. Составьте 3 задачи, решение которых записывается в виде равенства $12-8=4$. На основании какого теоретического положения это возможно?

52. Отношения «больше на» и «меньше на»

При решении задач и в практической деятельности часто требуется не только установить, что число a меньше (или больше) числа b, но и узнать, на сколько число a меньше (или больше) числа b.

Каков смысл отношений «меньше на» и «больше на»?

Пусть a и b — целые неотрицательные числа, такие, что $a=n(A)$, $b=n(B)$, и установлено, что $a<b$. Это значит, что в множестве B можно выделить собственное подмножество B_1, равномощное множеству A, и множество $B\setminus B_1$ не пусто. Пусть $n(B\setminus B_1)=c$ $(c\neq 0)$. Тогда в множестве B элементов столько же, сколько в множестве A, да еще c элементов. В этом случае говорят, что **число a меньше числа b на c или что число b больше числа a на c.**

Так как $c=n(B\setminus B_1)$, где $B_1\subset B$, то $c=b-a$. Следовательно, **чтобы узнать, на сколько одно число меньше или больше другого, надо из большего числа вычесть меньшее.**

Рассмотрим, например, задачу: «У школы посадили 4 дуба и 9 лип. На сколько больше посадили лип?»

Согласно сформулированному правилу ответ на вопрос находится при помощи вычитания: $9-4=5$ (лип). Однако возникает недоразумение: можно ли из 9 лип вычитать 4 дуба? Дело в том, что в данном случае из 9 лип вычитают 4 липы. Чтобы убедиться в этом, изобразим дубы кружками, а липы квадратиками (рис. 95).

Чтобы ответить на вопрос задачи, выделим в множестве лип подмножество Z_1, равномощное множеству дубов (на рисунке это множество показано фигурной скобкой). Тогда остальные липы образуют дополнение множества Z_1 до множества Z и их число равно разности 9 и 4.

Отношения «больше на» и «меньше на» встречаются и в задачах другого вида.

Рассмотрим, например, такую задачу: «У школы посадили 4 дуба, а лип на 5 больше. Сколько лип посадили?»

В задаче речь идет о двух множествах деревьев: множестве дубов и множестве лип. Обозначим их D и Z. Известно, что $n(D)=4$, а число элементов в множестве Z надо найти, зная, что в нем на 5 элементов больше, чем в D. Последнее означает, что $n(Z)-n(D)=5$, откуда $n(Z)=5+n(D)=5+4=9$. Можно дать более подробное пояснение, воспользовавшись рисунком 95.

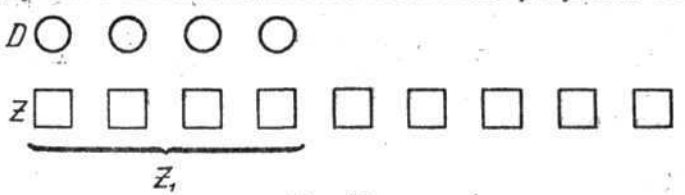


Рис. 95

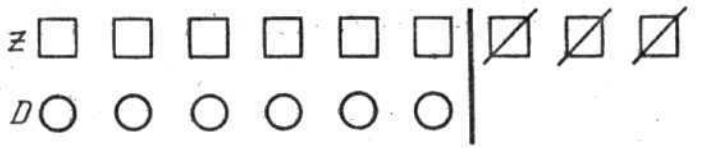


Рис. 96

Так как в множестве Z на 5 элементов больше, чем в множестве D, то это значит, что в множестве Z столько же элементов, сколько в D, да еще 5 элементов. Другими словами, множество Z можно рассматривать как объединение двух множеств Z_1 и Z_2, таких, что $Z_1\sim D$ и $n(Z_2)=5$. Поскольку множества Z_1 и Z_2 не имеют общих элементов, то $n(Z)=n(Z_1\cup Z_2)=n(Z_1)+n(Z_2)=4+5=9$.

Обратимся теперь к задаче: «У школы посадили 9 лип, а дубов на 3 меньше. Сколько посадили дубов?»

В ней так же, как и в предыдущей, речь идет о двух множествах: множестве лип (Z) и множестве дубов (D), но известно, что $n(Z)=9$, а число элементов в множестве D надо найти, зная, что в нем на 3 элемента меньше, чем в Z. Последнее означает, что $n(Z)-n(D)=3$, откуда $n(D)=n(Z)-3=9-3=6$.

Используя рисунок 96, решение этой задачи можно выполнить так: поскольку дубов на 3 меньше, чем лип, то лип на 3 больше, чем дубов, поэтому, удалив из множества Z подмножество, состоящее из трех элементов, получим множество, равномощное множеству D. $n(D)=9-3=6$.

Естественно, что в начальной школе при решении приведенных в пункте задач объяснение будет выглядеть иначе, но суть его от этого не изменится.

Заметим, что предложение «5 больше 2 на 3» нельзя записать кратко, используя знак «$>$», поскольку для записи отношения «больше на» (так же как и для отношения «меньше на») нет специального знака. Знак «$>$» служит для обозначения отношения «больше», а знак «$<$» — отношения «меньше».

Упражнения

1. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются при помощи сложения:

1) У Коли 7 марок, а у Саши на 3 марки больше. Сколько марок у Саши?

2) В парке 8 голубых елок. Их на 2 меньше, чем берез. Сколько берез в парке?

2. Объясните, почему следующие задачи решаются при помощи вычитания:

1) Таня нашла 9 грибов, а Лида на 4 гриба меньше. Сколько грибов нашла Лида?

2) У школы посадили 4 дуба и 9 лип. На сколько меньше посадили дубов?

3) У Нины 6 тетрадей, а у Коли 4. На сколько тетрадей больше у Нины, чем у Коли?

3. Составьте 2 простые задачи, в которых рассматривалось бы отношение «меньше на» и решение записывалось в виде равенства $10-2=8$.

4. Составьте 2 простые задачи, в которых рассматривалось бы отношение «больше на» и задача решалась при помощи сложения.

53. Правила вычитания числа из суммы и суммы из числа

Обоснуем известные правила вычитания числа из суммы и суммы из числа.

Правило вычитания числа из суммы. ***Чтобы вычесть число из суммы, достаточно вычесть это число из одного из слагаемых суммы и к полученному результату прибавить другое слагаемое.***

Запишем это правило, используя символы:

Если a, b, c — целые неотрицательные числа, то:

а) при $a \geqslant c$ имеем, что $(a+b)-c=(a-c)+b$;

б) при $b \geqslant c$ имеем, что $(a+b)-c=a+(b-c)$;

в) при $a \geqslant c$ и $b \geqslant c$ можно использовать любую из данных формул.

Пусть $a \geqslant c$, тогда разность $a-c$ существует. Обозначим ее через p: $a-c=p$. Отсюда $a=p+c$. Подставим сумму $p+c$ вместо a в выражение $(a+b)-c$ и преобразуем его: $(a+b)-c=(p+c+b)-c=p+b+c-c=p+b$.

Но буквой p обозначена разность $a-c$, значит, имеем $(a+b)-c=(a-c)+b$, что и требовалось доказать.

Аналогично проводятся рассуждения и для других случаев.

Приведем теперь иллюстрацию данного правила (случай «а») при помощи кругов Эйлера. Возьмем три конечных множества A, B и C, такие, что $n(A)=a$, $n(B)=b$, $n(C)=c$ и $A \cap B=\varnothing$, $C \subset A$. Тогда $(a+b)-c$ есть число элементов множества $(A \cup B) \setminus C$, а число $(a-c)+b$ есть число элементов множества $(A \setminus C) \cup B$. На кругах Эйлера множество $(A \cup B) \setminus C$ изображается заштрихованной областью, представленной на рисунке 97.

Легко убедиться в том, что множество $(A \setminus C) \cup B$ изобразится точно такой же областью. Значит, $(A \cup B) \setminus C=(A \setminus C) \cup B$ для данных множеств A, B и C. Следовательно, $n((A \cup B) \setminus C)=n((A \setminus C) \cup B)$ и $(a+b)-c=(a-c)+b$.

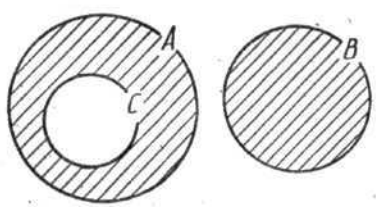


Рис. 97

Аналогично можно проиллюстрировать и случай «б».

Правило вычитания из числа суммы. ***Чтобы вычесть из числа сумму чисел, достаточно вычесть из этого числа последовательно каждое слагаемое одно за другим, т. е. если a, b, c — целые неотрицательные числа, то при $a \geqslant b+c$ имеем $a-(b+c)=(a-b)-c$.***

Обоснование этого правила и его теоретико-множественная иллюстрация выполняются так же, как и для правила вычитания числа из суммы.

Приведенные правила рассматриваются в начальной школе на конкретных примерах, для обоснования привлекаются наглядные изображения. Эти правила позволяют рационально выполнять вычисления. Например, правило вычитания из числа суммы лежит в основе приема вычитания числа по частям:

$$5-2=5-(1+1)=(5-1)-1=4-1=3.$$

Смысл приведенных правил хорошо раскрывается при решении арифметических задач различными способами. Например, задача «Утром ушли в море 20 маленьких и 8 больших рыбачьих лодок. 6 лодок вернулись. Сколько лодок с рыбаками должно еще вернуться?» может быть решена тремя способами:

I способ. 1. $20+8=28$
2. $28-6=22$

II способ. 1. $20-6=14$
2. $14+8=22$

III способ. 1. $8-6=2$
2. $20+2=22$

Упражнения

1. Докажите правило вычитания суммы из числа и проиллюстрируйте его при помощи кругов Эйлера.

2. Докажите правило: чтобы из разности двух чисел вычесть третье число, достаточно из уменьшаемого вычесть сумму двух других чисел.

3. Найдите наиболее рациональным способом значение выражения:

1) $(3748+10\,392)-8392$;
2) $7273-(396+1173)$;
3) $763+945-263$;
4) $568-229-168$.

4. Нижеприведенные задачи решите различными способами, дайте обоснование:

1) В одной банке было 10 соленых огурцов, а в другой 6 огурцов. За обедом съели 4 огурца. Сколько всего огурцов осталось?

2) В гараже стояло 20 машин, сначала выехало 7 машин, а потом 3 машины. Сколько машин осталось в гараже?

5. Решите нижеприведенные две задачи и объясните, чем отличаются их решения:

1) В одной бочке 40 ведер воды. Утром на поливку цветов израсходовали 12 ведер, а вечером 10 ведер. Сколько ведер воды осталось в бочке?

2) В одной бочке было 40 ведер воды, а в другой 12 ведер. На поливку цветов израсходовали 10 ведер. Сколько ведер воды осталось в бочках?

54. Умножение

Понятие произведения целых неотрицательных чисел может быть определено по-разному. Рассмотрим сначала подход, в основе которого лежит понятие суммы.

Определение. **Произведением целых неотрицательных чисел a и b называется такое целое неотрицательное число $a \cdot b$, которое удовлетворяет следующим условиям:**

1) $a \cdot b = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ слагаемых}}$ **при** $b > 1$;

2) $a \cdot 1 = a$ **при** $b = 1$;

3) $a \cdot 0 = 0$ **при** $b = 0$.

Теоретико-множественный смысл этого определения следующий. Если множества A_1, A_2, ... , A_b имеют по a элементов каждое и никакие два из них не пересекаются, то их объединение содержит $a \cdot b$ элементов. Следовательно, произведение $a \cdot b$ — это число элементов в объединении b попарно непересекающихся множеств, каждое из которых содержит по a элементов. Равенства $a \cdot 1 = a$ и $a \cdot 0 = 0$ принимаются по условию.

Действие, при помощи которого находят произведение чисел a и b, называют умножением; числа, которые умножают, называют множителями.

Произведение любых целых неотрицательных чисел существует, и оно единственно.

С данным определением учащиеся знакомятся в начальных классах. Смысл его раскрывается при решении простых задач.

Рассмотрим, например, такую задачу: «На каждое детское пальто нужно пришить 4 пуговицы. Сколько пуговиц нужно пришить на 6 таких пальто?»

Почему она решается при помощи умножения? Потому, что в ней требуется найти число элементов в объединении, состоящем из 6 множеств, в каждом из которых по 4 элемента. Согласно определению это число находится умножением: $4 \cdot 6 = 24$ (пуговицы).

Имеется и другое определение произведения целых неотрицательных чисел. Оно связано с декартовым произведением множеств.

Пусть даны два множества: $A = \{x, y, z\}$ и $B = \{n, t, r, s\}$. Найдем их декартово произведение, которое запишем в виде прямоугольной таблицы:

$$\begin{array}{cccc} (x, n), & (x, t), & (x, r), & (x, s), \\ (y, n), & (y, t), & (y, r), & (y, s), \\ (z, n), & (z, t), & (z, r), & (z, s). \end{array}$$

В каждой строке таблицы все пары имеют одинаковую первую компоненту, а в каждом столбце одинаковая вторая компонента. При этом никакие две строки не имеют хотя бы одной одинаковой пары. Отсюда следует, что число элементов в декартовом произведении $A \times B$ равно $3+3+3+3=12$. С другой стороны, $n(A)=3$, $n(B)=4$ и $3 \cdot 4 = 12$. Видим, что число элементов в декартовом произведении данных множеств A и B равно произведению $n(A) \cdot n(B)$.

Вообще если A и B — конечные множества, то

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B).$$

Таким образом, **произведение целых неотрицательных чисел a и b можно рассматривать как число элементов декартова произведения множеств A и B, где $n(A)=a$, $n(B)=b$:**

$$\boxed{a \cdot b = n(A \times B), \text{ где } n(A)=a,\ n(B)=b}.$$

И в первом, и во втором случае нами определено произведение двух чисел. А как определить произведение нескольких множителей?

Пусть произведение двух множителей определено и определено произведение n множителей. Тогда произведение, состоящее из $n+1$ множителя, т. е. произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}$, равно $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) \cdot a_{n+1}$.

Например, чтобы найти произведение $2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9$ согласно этому определению, надо выполнить последовательно следующие преобразования: $2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9 = (2 \cdot 7 \cdot 5) \cdot 9 = ((2 \cdot 7) \cdot 5) \cdot 9 = (14 \cdot 5) \cdot 9 = 70 \cdot 9 = 630$.

Упражнения

1. При определении произведения через сумму случаи умножения на 1 и 0 оговариваются особо. Почему нет таких оговорок в определении произведения через декартово произведение?

2. Объясните, почему $3 \cdot 2 = 6$, $1 \cdot 4 = 4$, $0 \cdot 2 = 0$, $4 \cdot 1 = 4$, $2 \cdot 0 = 0$, используя определение произведения, через:

1) сумму; 2) декартово произведение.

3. Как понимать утверждение: «Произведение целых неотрицательных чисел существует, и оно единственно»? Откуда вытекает его справедливость?

4. Используя определение произведения нескольких множителей, найдите произведение:

1) $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$; 2) $4 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14$.

5. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются умножением:

1) В 3 банки положили по 8 огурцов. Сколько всего огурцов в этих банках?

2) Для украшения елки каждый из пяти ребят сделал 4 игрушки. Сколько всего игрушек изготовили ребята?

55. Законы умножения

Докажем законы умножения, исходя из определения произведения через декартово произведение множеств.

1. Переместительный закон: ***для любых целых неотрицательных чисел a и b справедливо равенство $a \cdot b = b \cdot a$.***

Пусть $a = n(A)$, $b = n(B)$. Тогда по определению произведения $a \cdot b = n(A \times B)$. Но множества $A \times B$ и $B \times A$ равномощны: каждой паре (a, b) из множества $A \times B$ можно поставить в соответствие единственную пару (b, a) из множества $B \times A$, и наоборот. Значит, $n(A \times B) = n(B \times A)$, и поэтому $a \cdot b = n(A \times B) = n(B \times A) = b \cdot a$.

2. Сочетательный закон: ***для любых целых неотрицательных чисел a, b, c справедливо равенство $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.***

Пусть $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$. Тогда по определению произведения $(a \cdot b) \cdot c = n((A \times B) \times C)$, а $a \cdot (b \cdot c) = n(A \times (B \times C))$. Множества $(A \times B) \times C$ и $A \times (B \times C)$ различны: первое состоит из пар вида $((a, b), c)$, а второе — из пар вида $(a, (b, c))$, где $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Но множества $(A \times B) \times C$ и $A \times (B \times C)$ равномощны, так как существует взаимно однозначное отображение одного множества на другое. Поэтому $n((A \times B) \times C) = n(A \times (B \times C))$, и, значит, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

3. Распределительный закон умножения относительно сложения: ***для любых целых неотрицательных чисел a, b, c справедливо равенство $(a + b) \cdot c = ac + bc$.***

Этот закон выводится из равенства

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) \quad (*).$$

Пусть $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$ и $A \cap B = \varnothing$. Тогда по определению произведения имеем $(a + b) \cdot c = n((A \cup B) \times C)$. Откуда на основании равенства $(*)$ получаем $n((A \cup B) \times C) = n((A \times C) \cup (B \times C))$, и далее по определению суммы и произведения $n((A \times C) \cup (B \times C)) = n(A \times C) + n(B \times C) = ac + bc$.

4. Распределительный закон умножения относительно вычитания: ***для любых целых неотрицательных чисел a, b и c и $a \geqslant b$ справедливо равенство $(a - b)c = ac - bc$.***

Этот закон выводится из равенства $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ и доказывается аналогично предыдущему.

Переместительный и сочетательный законы умножения можно распространить на любое число множителей. Как и при сложении, эти законы часто используются совместно, т. е. произведение нескольких множителей не изменится, если их переставить любым способом и если любую их группу заключить в скобки.

Распределительные законы устанавливают связь умножения со сложением и вычитанием. На основе этих законов происходит раскрытие скобок в выражениях типа $(a + b)\,c$ и $(a - b)\,c$, а также вынесение

множителя за скобки, если выражение имеет вид $ac - bc$ или $ac + bc$.

Выясним, как используются законы умножения при вычислениях. Найдем, например, значение выражения $125 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 8$.

Переставим местами множители 15 и 6 — это можно сделать на основании переместительного закона умножения, получим $125 \cdot 6 \times \times 15 \cdot 8$.

Выделим в этом произведении группы по 2 множителя — это разрешает сделать сочетательный закон умножения: $(125 \cdot 6) \times \times (15 \cdot 8)$.

Произведем умножение чисел в скобках: $750 \cdot 120$.

Чтобы найти это произведение, представим 750 в виде суммы двух слагаемых 700 и 50: $(700 + 50) \cdot 120$.

Умножим каждое слагаемое на 120 — это можно сделать согласно распределительному закону умножения относительно сложения: $700 \cdot 120 + 50 \cdot 120 = 84\,000 + 6000 = 90\,000$.

Значение выражения $125 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 8$ можно найти иначе: $125 \cdot 15 \times \times 6 \cdot 8 = 125 \cdot (15 \cdot 6) \cdot 8 = 125 \cdot 90 \cdot 8 = 125 \cdot 8 \cdot 90 = (125 \cdot 8) \cdot 90 = 1000 \times \times 90 = 90\,000$.

При выполнении преобразований в этом случае были использованы:

сочетательный закон умножения — на его основе была выделена группа множителей $15 \cdot 6$, а затем $125 \cdot 8$;

переместительный закон умножения — на его основе были переставлены множители 90 и 8.

В начальном курсе математики изучается переместительное свойство умножения, оно формулируется так: «От перестановки множителей произведение не изменится» — и широко используется при составлении таблицы умножения однозначных чисел. Сочетательный закон в начальной школе в явном виде не рассматривается, но используется вместе с переместительным при умножении числа на произведение. Происходит это следующим образом: учащимся предлагается рассмотреть различные способы нахождения значения выражения $3 \cdot (5 \cdot 2)$ и сравнить полученные результаты.

Приводятся случаи:

1) $3 \cdot (5 \cdot 2) = 3 \cdot 10 = 30$;

2) $3 \cdot (5 \cdot 2) = (3 \cdot 5) \cdot 2 = 15 \cdot 2 = 30$;

3) $3 \cdot (5 \cdot 2) = (3 \cdot 2) \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$.

Первый из них основан на правиле порядка действий, второй — на сочетательном законе умножения, третий — на переместительном и сочетательном законах умножения.

Распределительный закон умножения относительно сложения рассматривается в школе на конкретных примерах и носит название правил умножения числа на сумму и суммы на число. Рассмотрение этих двух правил диктуется методическими соображениями.

Упражнения

1. Какие преобразования выражений можно выполнять на основе:
1) переместительного закона умножения;
2) сочетательного закона умножения;
3) распределительного закона умножения относительно сложения?

2. Используя переместительный и сочетательный законы умножения, выражение $(6\cdot7)\cdot5$ преобразуйте к виду $(6\cdot5)\cdot7$. Каждый шаг в преобразованиях обоснуйте.

3. Используя распределительные законы, найдите значения следующих выражений:
1) $9\cdot13+9\cdot87$;
2) $5\cdot(12+44)$;
3) $17\cdot12-17\cdot7$;
4) $297\cdot8$.

4. Найдите рациональным способом значения выражений, объяснив каждый шаг в преобразованиях:
1) $4\cdot17\cdot25$;
2) $(8\cdot379)\cdot125$;
3) $24\cdot19\cdot25\cdot5$;
4) $(40\cdot7\cdot3)\cdot25$;
5) $126\cdot24+126\cdot6+126\cdot10$;
6) $61\cdot101$.

5. Докажите, что для любых натуральных чисел a, b, c справедливо утверждение: если $a<b$, то $ac<bc$.

6. Не выполняя умножения, можно сказать, что $842\cdot58<842\times\times61$. Почему?

7. Вместо $*$ поставьте знаки «$>$», «$<$» или «$=$» так, чтобы получились истинные высказывания:
1) $3\cdot29+7\cdot29 * 10\cdot29$;
2) $8\cdot31-3\cdot31 * 6\cdot31$;
3) $7\cdot43+9\cdot43 * 15\cdot43$;
4) $3\cdot17+9\cdot17 * 13\cdot17$.

8. По учебнику математики для начальных классов познакомьтесь с материалом урока «Перестановка множителей». Каким способом рассуждений получают вывод: «От перестановки множителей произведение не изменится»?

9. Являются ли доказательством переместительного закона умножения целых неотрицательных чисел рассуждения:

$2\cdot3=6$ и $3\cdot2=6$,
$4\cdot9=36$ и $9\cdot4=36$,
$5\cdot17=85$ и $17\cdot5=85$.

Следовательно, для любых целых неотрицательных чисел a и b справедливо равенство $ab=ba$?

10. Решите задачу различными способами и обоснуйте выбор способа:
1) Двум мальчикам раздали по 3 зеленых и по 4 красных круга каждому. Сколько всего кругов раздали этим мальчикам?
2) Работница укладывала в коробки стеклянные бокалы. В каждую коробку она укладывала 3 зеленых бокала и 3 желтых. Она уложила 16 коробок. Сколько всего бокалов она уложила?

56. Деление

Рассмотрим задачу, которую решают младшие школьники, приступая к изучению действия деления: «8 апельсинов разложили на тарелки, по 2 апельсина на каждую. Сколько раз по 2 апельсина положили? Сколько тарелок потребовалось?»

Ответ на вопрос задачи находится при помощи деления: $8:2=4$.

Проанализируем решение этой задачи. В задаче рассматривается множество, в котором 8 элементов. Оно разбивается на подмножества, в каждом из которых по 2 элемента, т. е. на равномощные подмножества (рис. 98). Кроме того, они попарно не пересекаются. В задаче спрашивается, сколько таких подмножеств получилось. Таким образом, число 4, полученное в ответе,— это число двухэлементных подмножеств, на которые разбито множество из 8 элементов.

Обратимся теперь к другой задаче: «12 карандашей раздали 3 ученикам поровну. Сколько карандашей получил каждый?»

Она также решается делением: $12:3=4$ (карандаша). Но число 4 здесь выступает в другом смысле — как число элементов в каждом из трех равномощных непересекающихся подмножеств, на которые разбито множество, содержащее 12 элементов (рис. 99).

В общем виде частное целого неотрицательного числа a и натурального числа b определяется следующим образом:

Определение. **Пусть $a=n(A)$ и множество A разбито на попарно непересекающиеся равномощные подмножества.**

Если b — число подмножеств в разбиении множества A, то частным чисел a и b называется число элементов каждого подмножества.

Если b — число элементов каждого подмножества в разбиении множества A, то частным чисел a и b называется число подмножеств в этом разбиении.

Действие, при помощи которого находят частное $a:b$, называется делением, число a — делимым, b — делителем.

Часто, чтобы проверить правильность выполнения действия деления, мы обращаемся к умножению. Почему? Очевидно, потому, что действия деления и умножения взаимосвязаны. Но какова эта связь?

Пусть $a=n(A)$ и множество A разбито на b попарно непере-

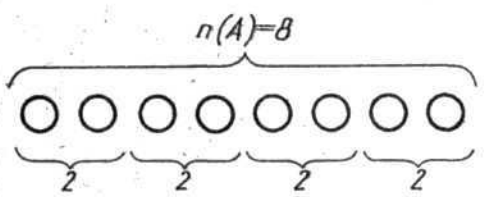


Рис. 98

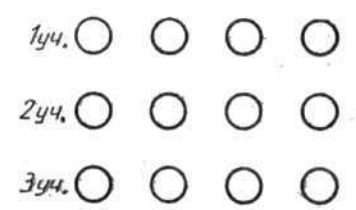


Рис. 99

секающихся равномощных подмножества A_1, A_2, ..., A_b. Тогда $c=a:b$ есть число элементов в каждом таком подмножестве, т. е. $c=a:b=n(A_1)=n(A_2)=\ldots=n(A_b)$.

Так как по условию $A=A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_b$, то $n(A)=n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_b)$. Но подмножества A_1, A_2, ..., A_b попарно не пересекаются, значит, по определению суммы $n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_b)=n(A_1)+n(A_2)+\ldots+n(A_b)=\underbrace{c+c+\ldots+c}_{b \text{ слагаемых}}$.

Согласно определению произведения сумма b слагаемых, каждое из которых равно c, есть произведение $c \cdot b$.

Таким образом, установлено, что $a=c \cdot b$, т. е. частным чисел a и b является такое число c, произведение которого и числа b равно a. К такому же выводу мы придем, если частное $c=a:b$ будет числом подмножеств в разбиении множества A.

Таким образом, получаем второе определение частного:

Определение. **Частным целого неотрицательного числа a и натурального числа b называется такое целое неотрицательное число $c=a:b$, произведение которого и числа b равно a.**

Можно показать и наличие обратной связи, т. е. что из второго определения частного вытекает первое:

$$a:b=c \Leftrightarrow a=c \cdot b.$$

Итак, во втором случае частное определено через произведение. Поэтому говорят, что деление есть действие, обратное умножению.

Всегда ли существует частное натуральных чисел a и b? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема:

Теорема. ***Для того чтобы существовало частное двух натуральных чисел a и b, необходимо, чтобы $b \leqslant a$.***

Доказательство. Пусть частное натуральных чисел a и b существует, т. е. существует такое натуральное число c, что $a=c \cdot b$. Для любого натурального числа c справедливо утверждение $1 \leqslant c$. Умножим обе части этого неравенства на натуральное число b, получим $b \leqslant c \cdot b$. Поскольку $c \cdot b=a$, то $b \leqslant a$. Теорема доказана.

Чему равно частное $a=0$ и натурального числа b? По определению это такое число a, которое удовлетворяет условию $c \cdot b=0$. Так как $b \neq 0$, то равенство $c \cdot b=0$ будет выполняться при $c=0$. Следовательно, $0:b=0$, если $b \in N$.

Теорема. ***Если частное натуральных чисел a и b существует, то оно единственно.***

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы о единственности разности.

Рассмотрим теперь вопрос о невозможности деления целого неотрицательного числа на нуль.

Пусть даны числа $a \neq 0$ и $b=0$. Предположим, что частное чисел a и b существует. Тогда по определению частного существует такое целое неотрицательное число c, что $a=c \cdot 0$, отсюда

$a=0$. Пришли к противоречию с условием. Следовательно, **частное чисел $a \neq 0$ и $b=0$ не существует.**

Если $a=0$ и $b=0$, то из предложения, что частное таких чисел a и b существует, следует равенство $0=c \cdot 0$, истинное при любых значениях c, т. е. частным чисел $a=0$ и $b=0$ может быть любое число. Поэтому в математике считают, что **деление нуля на нуль также невозможно.**

В начальном курсе математики первоначальные представления о делении формируются на основе практических упражнений, связанных с разбиением множества на попарно непересекающиеся равномощные подмножества, но без введения соответствующей терминологии и символики. Главным средством раскрытия этого понятия деления является решение простых задач. Суть решения двух таких задач рассмотрена в начале пункта.

Определение деления как действия, обратного умножению, в явном виде не дается. Взаимосвязь деления и умножения устанавливается при изучении темы «Нахождение неизвестного множителя», где, по существу, происходит обобщение двух смыслов частного, имеющих место при его теоретико-множественной трактовке.

Упражнения

1. Дайте теоретико-множественное истолкование следующим равенствам: 1) $6:3=2$; 2) $4:4=1$; 3) $3:1=3$.

2. В учебнике по математике для начальной школы приведено правило: «Деление можно проверить умножением.

$$78:3=26.$$

Для проверки умножим полученное частное на делитель: $26 \cdot 3=78$. Получилось делимое».

Каково теоретическое обоснование этого правила?

3. Сформулируйте необходимое условие существования частного натуральных чисел. Является ли оно достаточным?

4. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются при помощи деления:

1) Мама раздала детям 12 яблок, по 4 яблока каждому. Сколько детей получили яблоки?

2) 8 морковок раздали 4 кроликам поровну. Сколько морковок дали каждому кролику?

5. Как изменится частное, если делимое увеличить в 52 раза, а делитель в 13 раз?

6. Найдите ошибку в следующем рассуждении:

«$35+10-45=42+12-54$ — это истинное равенство. Вынесем множители левой и правой частей за скобки. Получим:

$$5 \cdot (7+2-9)=6 \cdot (7+2-9).$$

Разделим обе части этого равенства на выражение $7+2-9$. Получим, что $5=6$!»

57. Отношения «больше в» и «меньше в»

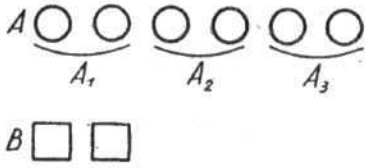


Рис. 100

Часто при решении задач и в практической деятельности возникает вопрос: «Во сколько раз одно число больше или меньше другого?» Первое знакомство с отношениями «больше в» и «меньше в» происходит в начальной школе. Уточним смысл этих отношений.

Пусть дано множество A, в котором 6 элементов, и множество B, содержащее 2 элемента. Выделим в множестве A подмножества, равномощные множеству B (рис. 100). Их оказывается 3. В этом случае говорят, что число 6 больше числа 2 в 3 раза, а число 2 меньше числа 6 в 3 раза.

Вообще если даны числа a и b, такие, что $a=n(A)$, $b=n(B)$, $a>b$, и множество A можно разбить на c подмножеств, равномощных множеству B, то говорят, что число a больше числа b в c раз, а число b меньше числа a в c раз.

Но что представляет собой это число c? С теоретико-множественной точки зрения — это частное чисел a и b. Отсюда получаем правило:

Чтобы узнать, во сколько раз одно число больше или меньше другого, необходимо большее число разделить на меньшее.

Рассмотрим, например, задачу: «Посадили 3 дуба и 12 берез. Во сколько раз меньше посадили дубов, чем берез?»

Согласно сформулированному правилу ответ на вопрос находится при помощи деления: $12:3=4$ (раза). Смысл произведенной операции хорошо иллюстрирует рисунок 101.

Отношения «больше в» и «меньше в» встречаются и в задачах другого вида.

З а д а ч а. У Нины 6 тетрадей, а у Коли в 2 раза меньше. Сколько тетрадей у Коли?

В задаче речь идет о двух множествах: множестве A тетрадей у Нины и множестве B тетрадей у Коли. Известно, что $n(A)=6$. Требуется найти $n(B)$, зная, что это число в 2 раза меньше числа 6. Исходя из этого условия множество A можно представить состоящим из двух равномощных подмножеств (рис. 102), и тогда в множестве B будет столько элементов, сколько в каждом подмножестве множества A, число которых находится делением: $6:2=3$. Значит, $n(B)=3$, т. е. у Коли 3 тетради.

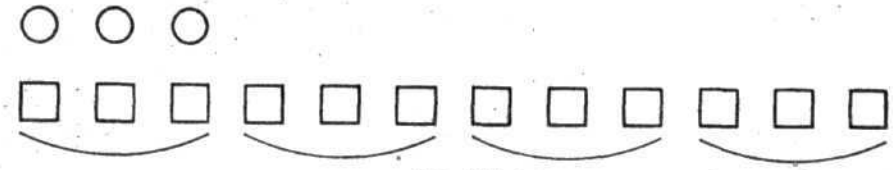


Рис. 101

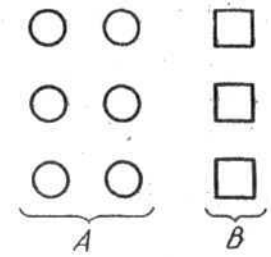


Рис. 102

З а д а ч а. У Нины 3 тетради, а у Коли в 4 раза больше. Сколько тетрадей у Коли?

В этой задаче, так же как и в предыдущей рассматриваются два множества: множество A тетрадей у Нины и множество B тетрадей у Коли. Известно, что $n(A)=3$. Требуется найти $n(B)$, зная, что это число элементов в множестве B в 4 раза больше числа элементов в множестве A. Это значит, что множество B состоит из четырех непересекающихся подмножеств B_1, B_2, B_3 и B_4, равномощных множеству A (рис. 103), и, следовательно, $n(B_1)=n(B_2)=n(B_3)=n(B_4)=n(A)$. Но тогда число элементов в множестве B можно найти сложением $n(B)=n(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4)=n(B_1)+n(B_2)+n(B_3)+n(B_4)=3+3+3+3$. Заменив сложение умножением, получаем $3+3+3+3=3\cdot 4=12$. Значит, у Коли 12 тетрадей.

Заметим, что предложение «a больше b в c раз» нельзя записывать кратко, используя знак «$>$», поскольку для записи отношения «больше в» (так как и для отношения «меньше в») нет специального знака.

Упражнения

1. Объясните смысл предложения: 1) 10 больше 5 в 2 раза; 2) 2 меньше 8 в 4 раза.

2. Назовите отношения, которые рассматриваются в нижеприведенных задачах, решите эти задачи, выбор действия обоснуйте:

1) Для украшения елки ученица вырезала 3 звездочки, а флажков в 2 раза больше, чем звездочек. Сколько флажков вырезала ученица?

2) На участке растут 4 ели, их в 3 раза меньше, чем берез. Сколько на участке берез?

3) У Володи было 8 красных кружков, а синих в 2 раза меньше. Сколько синих кружков было у Володи?

4) Во дворе гуляли 4 утенка и 8 цыплят. Во сколько раз больше было цыплят, чем утят? Во сколько раз меньше было утят, чем цыплят?

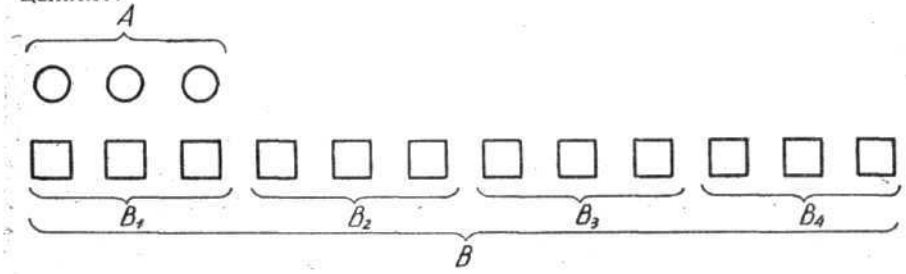


Рис. 103

5) В коробке лежало 8 цветных карандашей, их в 2 раза больше, чем простых. Сколько простых карандашей лежало в коробке?

3. Составьте две простые задачи, в которых рассматривалось бы отношение «больше в» и решение которых имело бы вид равенства $15:3=5$.

4. Решите задачи, выбор действий обоснуйте:

1) Магазин продал 9 лодок, мотоциклов в 3 раза меньше, чем лодок, а велосипедов в 5 раз больше, чем лодок. Сколько лодок, мотоциклов и велосипедов продал магазин?

2) В книге 72 страницы. Лена прочитала страниц в 9 раз меньше, чем их содержится в этой книге. Сколько страниц ей осталось прочитать?

3) Кате 9 лет, а ее папа в 5 раз старше Кати. На сколько лет Катя моложе своего папы?

58. Правила деления суммы на число и числа на произведение

Познакомимся с некоторыми свойствами деления натуральных чисел. Выбор этих правил определен содержанием начального курса математики.

Правило деления суммы на число. ***Если числа a и b делятся на число c, то и их сумма $a+b$ делится на c; частное, получаемое при делении суммы $a+b$ на число c, равно сумме частных, получаемых при делении a на c и b на c,*** т. е.

$$(a+b):c=a:c+b:c.$$

Доказательство. Так как a делится на c, то существует такое натуральное число $m=a:c$, что $a=c\cdot m$. Аналогично существует такое натуральное число $n=b:c$, что $b=c\cdot n$. Тогда $a+b=c\cdot m+c\cdot n=c\cdot(m+n)$. Отсюда следует, что $a+b$ делится на c и частное, получаемое при делении $a+b$ на число c, равно $m+n$, т. е. $a:c+b:c$.

Доказанное правило можно истолковать с теоретико-множественных позиций.

Пусть $a=n(A)$, $b=n(B)$, причем $A\cap B=\varnothing$. Если каждое из множеств A и B можно разбить на c равномощных подмножеств, то и объединение этих множеств допускает такое же разбиение (рис. 104).

При этом если в каждом подмножестве разбиения множества A содержится $a:c$ элементов, а в каждом подмножестве множества B содержится $b:c$ элементов, то в каждом подмножестве множества $A\cup B$ содержится $a:c+b:c$ элементов. Это и значит, что $(a+b):c=a:c+b:c$.

Правило деления числа на произведение. ***Если натуральное число a делится на натуральные числа b и c, то, чтобы разделить a на произведение чисел b и c, достаточно разделить число a на b (c) и полученное частное разделить на c (b):***

$$a:(b\cdot c)=(a:b):c=(a:c):b.$$

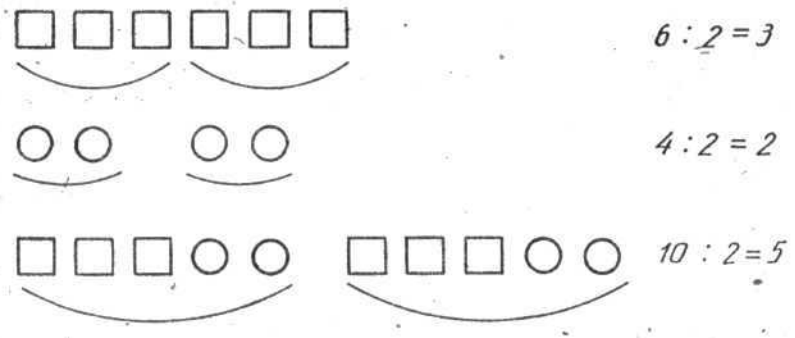


Рис. 104

Доказательство. Положим $(a:b):c=x$. Тогда по определению частного $a:b=c\cdot x$, отсюда аналогично $a=b\cdot(cx)$. На основании сочетательного закона умножения $a=(bc)\cdot x$. Полученное равенство означает, что $a:(bc)=x$. Таким образом, $a:(bc)=(a:b):c$.

Правило умножения числа на частное двух чисел. ***Чтобы умножить число на частное двух чисел, достаточно умножить это число на делимое и полученное произведение разделить на делитель,*** т. е.

$$a\cdot(b:c)=(a\cdot b):c.$$

Доказательство этого правила аналогично предыдущему.

Применение сформулированных правил позволяет упростить вычисления.

Например, чтобы найти значение выражения $(720+600):24$, достаточно разделить на 24 слагаемые 720 и 600 и полученные частные сложить:

$$(720+600):24=720:24+600:24=30+25=55.$$

Значение выражения $1440:(12\cdot15)$ можно найти, разделив сначала 1440 на 12, а затем полученное частное разделить на 15:

$$1440:(12\cdot15)=(1440:12):15=120:15=8.$$

Указанные правила рассматриваются в начальном курсе математики на конкретных примерах. При первом знакомстве с правилом деления суммы $6+4$ на число 2 привлекаются иллюстративный материал. В дальнейшем это правило используется для рационализации вычислений. Правило деления числа на произведение широко применяется при делении чисел, оканчивающихся нулями.

Упражнения

1. Найдите значение выражения, применив правило деления суммы на число:

а) $(720+600):12$; в) $(675+225):25$;
б) $(770+140):35$; г) $(120+36+186):6$.

2. Учащимся предлагаются задания:
Рассмотри и объясни решение примеров:

$$36:2=(20+16):2=\\=20:2+16:2=\\=10+8=18$$

$$65:5=(50+15):5=\\=50:5+15:5=\\=10+3=13$$

Выполните это задание и объясните, в чем заключается здесь смысл использования правила деления суммы на число.

3. Решите задачу разными способами:
«В лапту играли 14 девочек и 12 мальчиков. Они разделились на 2 команды. Сколько человек было в каждой команде?»

4. Обоснуйте все преобразования выражения:
1) $420:14=420:(7\cdot2)=(420:7):2=60:2=30$;
2) $7200:900=7200:(9\cdot100)=(7200:100):9=72:9=8$.

5. Найдите значение выражения, используя правило деления числа на произведение 1) $600:24$; 2) $630:42$; 3) $280:35$; 4) $5400:900$.

6. Сравните выражения, не производя вычислений:
1) $560:(7\cdot4)$ и $560:7:4$;
2) $240:(3\cdot5)$ и $240:3\cdot5$;
3) $32\cdot(10\cdot2)$ и $32\cdot10+32\cdot2$;
4) $56\cdot10\cdot4$ и $56\cdot14$;
5) $12\cdot(60:15)$ и $12\cdot60:15$.

7. Найдите ошибку в следующем рассуждении:
«$16:16=25:25$ — это истинное равенство. После вынесения за скобки общего множителя будем иметь: $16\,(1:1)=25\,(1:1)$. Зная, что $1:1=1$, получаем, что $16=25$!»

59. Деление с остатком

Число 37 не делится на 8. Но существуют числа 4 и 5, такие, что $37=8\cdot4+5$. Говорят, что деление числа 37 на 8 выполнено с остатком, при этом найдено неполное частное 4 и остаток 5.

Определение. **Разделить с остатком целое неотрицательное число a на натуральное число b — это значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что $a=bq+r$ и $0\leqslant r<b$.**

Обратим внимание на особенности остатка, которые вытекают из данного определения. Остаток есть натуральное число, меньшее делителя b, поэтому при делении целых неотрицательных чисел на b может получиться всего b различных остатков: 0, 1, 2, 3, ..., $b-1$. Например, при делении с остатком целых неотрицательных чисел на 5 возможны остатки: 0, 1, 2, 3, 4.

Если $a<b$, то при делении a на b с остатком неполное частное $q=0$, а остаток $r=a$, т. е. $a=0\cdot b+a$.

Всегда ли можно выполнить деление a на b с остатком? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, которую мы примем без доказательства.

Теорема. ***Для любого целого неотрицательного числа a и натурального числа b существуют целые неотрицательные числа q и r, такие, что $a=b\cdot q+r$, причем $0\leqslant r<b$. Пара целых неотрицательных чисел (q, r), обладающая этим свойством, единственная.***

Выясним, каков теоретико-множественный смысл деления с остатком.

Пусть $a=n(A)$ и множество A разбито на множества A_1, A_2, ..., A_q, X так, что множества A_1, A_2, ..., A_q равномощны и содержат по b элементов, а множество X содержит меньше элементов, чем каждое из множеств A_1, A_2, ..., A_q, например $n(X)=r$. Тогда $a=bq+r$, где $0\leqslant r<b$. Таким образом, неполное частное q — это число равномощных подмножеств (в каждом из которых b элементов) в разбиении множества A, а остаток r — это число элементов в множестве X.

В начальной школе знакомство с делением с остатком происходит при рассмотрении ситуации, в которой из 9 детей образуются 4 пары и 1 человек остается без пары, т. е., по сути дела, знакомство с неполным частным и остатком происходит на теоретико-множественной основе. Используется такая запись деления с остатком:

$$9:2=4 \text{ (ост. 1)}.$$

Подчеркивается, что если при делении получается остаток, то он всегда меньше делителя.

Важность деления с остатком в том, что оно лежит в основе алгоритма деления многозначных чисел.

Упражнения

1. Выполните деление с остатком: 1) 42 на 5; 2) 82 на 9; 3) 677 на 42; 4) 105 на 82.

2. Какие остатки могут получиться при делении целых неотрицательных чисел на: 1) 3; 2) 8; 3) 35?

3. Какой вид имеет число a, если при делении на 7 оно дает в остатке: 1) 0; 2) 3; 3) 6?

4. Найдите такие числа a и b, чтобы при делении с остатком a на b в частном получалось 17 и в остатке 17. Единственна ли такая пара чисел a и b?

5. При делении 228 на некоторое число b в частном получили число 8, а в остатке 4. На какое число делили 228?

6. Разбейте множество натуральных чисел от 5 до 23 на классы чисел, дающих одинаковые остатки при делении на 4. Сколько классов получилось?

7. На какие классы разбивается множество целых неотрицатель-

ных чисел в зависимости от остатков, получаемых при делении на 6? Назовите по два представителя каждого класса.

8. При делении чисел a и b на 8 получается один и тот же остаток 7. Какой остаток получится при делении на 8 числа: 1) $a+b$; 2) $a-b$; 3) $a \cdot b$?

9. Задачу «Запиши 3 числа, при делении которых на 7 в остатке получается 1, и 3 числа, при делении которых на 8 в остатке получается 5» учащийся решил способом подбора. Запишите формулы для получения различных чисел указанных видов.

10. Приведите примеры заданий из учебников математики для начальных классов, при выполнении которых учащиеся выполняют деление с остатком.

60. Свойства множества целых неотрицательных чисел

Множество целых неотрицательных чисел обладает рядом свойств. В частности, оно **упорядоченное** и **бесконечное.**

Докажем, что множество целых неотрицательных чисел может быть упорядочено при помощи отношения «меньше». Для этого покажем, что это отношение транзитивно и антисимметрично, причем будем исходить из определения отношения «меньше» через сумму.

Теорема. ***Если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$.***

Доказательство. Так как $a<b$ и $b<c$, то по определению отношения «меньше» найдутся такие натуральные числа x и y, что $b=a+x$ и $c=b+y$. Но тогда $c=(a+x)+y$, и на основании сочетательного закона сложения получаем $c=a+(x+y)$. Поскольку $x+y$ — целое неотрицательное число, то согласно определению отношения «меньше» $a<c$.

Теорема. ***Если $a<b$, то неверно, что $b<a$.***

Доказательство. Нетрудно убедиться в том, что ни для одного целого неотрицательного числа a не выполняется неравенство $a<a$. Если бы имели $a<a$, то нашлось бы такое натуральное число c, что $a=a+c$, но это невозможно в силу единственности суммы. Предположим теперь, что оба неравенства $a<b$ и $b<a$ выполняются. Тогда по свойству транзитивности отношения «меньше» будем иметь $a<a$, что невозможно.

Так как отношение «меньше» для целых неотрицательных чисел транзитивно и антисимметрично, то оно является отношением порядка, а множество целых неотрицательных чисел — упорядоченным множеством.

Из рассмотренных свойств отношения «меньше» вытекает, что для любых целых неотрицательных чисел a и b может выполняться лишь одно из отношений $a<b$, $a=b$, $b>a$.

Располагая элементы этого множества так, чтобы из любых двух чисел сначала шло меньшее, получим ряд целых неотрицательных чисел: 0, 1, 2, 3, 4, ... Этот ряд бесконечен.

Возьмем некоторое множество A, в котором a элементов. Если

к нему присоединить еще один элемент, отличный от всех элементов множества A, то получим новое множество B, в котором будет $a+1$ элементов. Нетрудно доказать, что число a меньше числа $a+1$. Назовем число $a+1$ непосредственно следующим за числом a. Тогда для каждого целого неотрицательного числа можно указать единственное натуральное число, которое за ним непосредственно следует. Обратно: каждое целое неотрицательное число непосредственно следует не более чем за одним целым неотрицательным числом, нуль непосредственно не следует ни за каким целым неотрицательным числом. Далее, отправляясь от числа 0 и переходя по порядку к непосредственно следующим друг за другом натуральным числам, мы получим множество целых неотрицательных чисел.

Отношение «непосредственно следовать за» тесно связано со сложением и умножением целых неотрицательных чисел. Действительно, сумму $a+(b+1)$ легко найти, если известна сумма $a+b$: $a+(b+1)=(a+b)+1$, т. е. она равна числу, непосредственно следующему за суммой $a+b$. Например, если известно, что $4+2=6$, то для нахождения суммы $4+3$ достаточно к 6 прибавить 1: $4+3=4+(2+1)=(4+2)+1=6+1=7$.

Аналогично используется понятие «непосредственно следовать за» и для умножения: произведение $7 \cdot 6$ легко найти, если известно, что $7 \cdot 5=35$. Для этого достаточно к 35 прибавить 7, так как $7 \cdot 6=7 \cdot (5+1)=7 \cdot 5+7=35+7$.

Отметим еще одно свойство множества целых неотрицательных чисел. Пусть a — некоторое целое неотрицательное число и $a+1$ — число, непосредственно следующее за a. Тогда ни для одного целого неотрицательного числа a нельзя указать такое натуральное число x, что $a<x<a+1$. Это свойство называют **свойством дискретности** множества натуральных чисел, а сами числа a и $a+1$ называют **соседними.**

Уже при изучении чисел первого десятка выясняется, как может быть получено каждое число натурального ряда. При этом используются понятия «следует», «предшествует», прибавление и вычитание 1, т. е. создаются условия для того, чтобы учащиеся увидели свойства чисел натурального ряда: любое число может быть получено прибавлением 1 к тому числу, которое встречается при счете перед ним; любое число на 1 больше, чем ему предшествующее, и др.

Упражнения

1. Первоклассникам предлагается заполнить пропуск в ряду 1, 2, □, 4, 5. Как должен объяснить свой ответ учащийся? Какими свойствами натурального ряда он воспользуется?

2. Учащимся I класса дано задание: назвать «соседей» числа 7. Какими свойствами натурального ряда должен воспользоваться учащийся, чтобы обосновать свой ответ?

3. Учащийся подсчитал, что $5+3=8$. Каким образом он может найти сумму $6+3$?

4. Второклассникам предлагается задание: зная, что $4\cdot7=28$, найти $4\cdot8$ и $4\cdot9$. Как они могут выполнить его?

§ 9. СМЫСЛ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЙ НАД ЧИСЛАМИ — РЕЗУЛЬТАТАМИ ИЗМЕРЕНИЯ ВЕЛИЧИН

Человеку в практической деятельности приходится не только вести счет предметов, но и измерять различные величины: длину, массу, время и т. д. Поэтому к возникновению натуральных чисел привела не только потребность счета, но и задача измерения величин.

Выясним, какой смысл имеет натуральное число, если оно получено в результате измерения величины. Все теоретические факты, связанные с этим подходом к натуральному числу, рассмотрим на примере одной величины — длины отрезка.

61. Сравнение отрезков. Действия над отрезками

Пусть даны отрезки a и b. Отложим равные им отрезки на одном луче с началом O. Получим отрезки $OA=a$ и $OB=b$. Возможны три случая.

1. Точки A и B совпадут (рис. 105). Тогда OA и OB — это один отрезок, а отрезки a и b равны ему, значит, $a=b$.

2. Точка B лежит внутри отрезка OA (рис. 106). Тогда говорят, что отрезок OB меньше отрезка OA (или отрезок OA больше отрезка OB), и пишут: $OB<OA$ ($OA>OB$) или $b<a$ ($a>b$).

3. Точка A лежит внутри отрезка OB (рис. 107). Тогда говорят, что отрезок OA меньше отрезка OB, и пишут: $OA<OB$ или $a<b$ ($b>a$).

Над отрезками выполняют различные действия.

Определение. **Отрезок a называют суммой отрезков a_1, a_2, ..., a_n, если он является их объединением, никакие из отрезков не имеют общей внутренней точки (не налегают друг на друга) и последовательно прилегают один к другому концами.**

Пишут: $a=a_1+a_2+\ldots+a_n$.

Например, можно утверждать, что отрезок a, изображенный на рисунке 108, является суммой отрезков a_1, a_2, a_3, a_4.



Рис. 105



Рис. 107

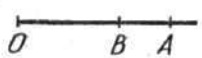


Рис. 106

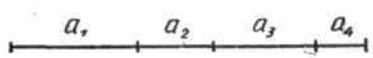


Рис. 108

Определение. **Разностью $a-b$ отрезков a и b называется такой отрезок c, что $b+c=a$.**

Разность отрезков a и b находится так. Строится отрезок AB, равный a, и на нем откладывается отрезок AC, равный b. Тогда отрезок CB есть разность $a-b$ отрезков a и b (рис. 109).

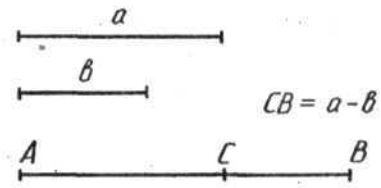


Рис. 109

Очевидно, для того чтобы существовала разность отрезков a и b, необходимо и достаточно, чтобы отрезок b был меньше отрезка a.

Действия над отрезками обладают рядом свойств. Назовем некоторые из них, не приводя доказательств.

1. Для любых отрезков a и b справедливо равенство $a+b=b+a$, т. е. сложение отрезков подчиняется переместительному закону.

2. Для любых отрезков a, b, c справедливо равенство $(a+b)+c=a+(b+c)$, т. е. сложение отрезков подчиняется сочетательному закону.

3. Для любых отрезков a и b имеем, что $a+b\neq a$.

4. Для любых отрезков a, b и c: если $a<b$, то $a+c<b+c$.

Упражнения

1. Начертите прямоугольник и проведите в нем диагональ. Требуется сравнить в нем стороны и диагональ. Как вы это сделаете?

2. Начертите четырехугольник. Требуется указать его стороны в порядке возрастания. Как вы это сделаете?

3. Начертите такие отрезки a и b, что $a<b$. Постройте их сумму и разность.

4. Начертите разносторонний треугольник. Установите, какая сторона в нем самая большая. Отложите на ней последовательно, начиная от вершины, две другие его стороны. Сделайте выводы.

5. Точки A, B и C лежат на одной прямой, и $AB>BC$. Можно ли утверждать, что $AC>BC$?

6. Докажите, что отношение «меньше» на множестве отрезков транзитивно.

7. Докажите, что сложение отрезков подчиняется переместительному закону.

62. Натуральное число как значение длины отрезка

Вспомним, как происходит измерение длин отрезков. Прежде всего из множества отрезков выбирают некоторый отрезок e и называют его **единичным отрезком** или **единицей длины.** Затем сравнивают данный отрезок a с единичным отрезком e. Если отрезок a слагается из n отрезков, равных единичному отрезку e, то пишут:

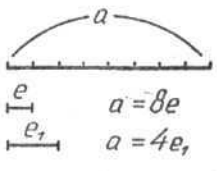


Рис. 110

$a = \underbrace{e+e+\ldots+e}_{n \text{ слагаемых}} = ne$ — **и натуральное число n называют численным значением длины отрезка a при единице длины e.**

Например, численным значением длины отрезка a, изображенного на рисунке 110, при единице длины e является число 8. Можно записать: $a=8e$.

Если в качестве единицы длины выбрать другой отрезок, то числовое значение длины отрезка a изменится. Так, если в качестве единицы длины выбрать отрезок e_1 (рис. 110), то численное значение длины отрезка a будет равно $4: a=4e_1$.

Важно заметить, что для каждого натурального числа n существует отрезок, длина которого выражается этим числом. Чтобы построить такой отрезок, достаточно единицу длины e отложить одну за другой n раз.

Таким образом, **натуральное число как численное значение длины отрезка a показывает, из скольких выбранных единичных отрезков e слагается отрезок a. При выбранной единице длины e это число единственное.**

Выясним теперь, какой смысл имеют для таких чисел отношения «равно» и «меньше».

Пусть натуральное число n — численное значение длины отрезка a, натуральное число m — численное значение длины отрезка b и получены эти числа при одной и той же единице длины e. Тогда:

если отрезки a и b равны, то равны и численные значения их длин, т. е. $n=m$; справедливо и обратное утверждение;

если отрезок a меньше отрезка b, то численное значение длины отрезка a меньше численного значения длины отрезка b, т. е. $n<m$; справедливо и обратное утверждение.

Установленная взаимосвязь между отрезками и численными значениями их длин позволяет сравнение длин отрезков сводить к сравнению их соответствующих численных значений и наоборот.

Например, 5 см $>$ 3 см, так как $5>3$.

Мы установили, что представляет собой натуральное число как результат измерения длины отрезка. Аналогично можно истолковать смысл натурального числа и отношений между числами и в связи с измерением других величин, таких, как площадь, масса, стоимость, время.

Упражнения

1. Постройте на одной прямой три равных отрезка MP, PZ, ZQ. Пусть единицей длины является отрезок MP. Чему тогда равны длины отрезков, получившихся на этой прямой? Чему равны их же длины, если за единицу длины будет принят отрезок MZ? MQ?

2. Измерив два отрезка некоторой единицей длины, получили, что один из них длиннее другого в 2 раза. После этого единицу длины уменьшили в 10 раз. Изменится ли результат сравнения длин отрезков?



Рис. 111

3. Каким понятием неявно воспользуется учащийся, решая задачу: «Сколько отрезков изображено на чертеже» (рис. 111)?

63. Смысл сложения и вычитания чисел, являющихся значениями величин

Выясним, какой смысл приобретают сложение и вычитание натуральных чисел, если эти числа получены в результате измерения длин отрезков.

1. Сложение. Пусть, например, числа 3 и 8 являются результатами измерения длин отрезков b и c при помощи единицы e, т. е. $b=3e$, $c=8e$. Известно, что $3+8=11$. Но результатом измерения длины какого отрезка является число 11? Очевидно, это значение длины отрезка $a=b+c$ (рис. 112).

Проведем рассуждения в общем виде.

Пусть отрезок a слагается из отрезков b и c и $b=me$, $c=ne$, где m и n — натуральные числа. Тогда отрезок b разбивается на m частей, каждая из которых равна единичному отрезку e, а отрезок c — на n таких частей. Следовательно, весь отрезок a разбивается на $m+n$ таких частей. Значит, $a=(m+n)e$.

Таким образом, **сумму натуральных чисел m и n можно рассматривать как значение длины отрезка a, состоящего из отрезков b и c, длины которых выражаются натуральными числами m и n.**

2. Вычитание. Если отрезок a состоит из отрезков b и c и длины отрезков a и b выражаются натуральными числами m и n (при одной и той же единице длины), то значение длины отрезка c равно разности значений длин отрезков a и b: $c=(m-n)e$, т. е. **разность натуральных чисел $m-n$ можно рассматривать как значение длины отрезка c, являющегося разностью отрезков a и b, длины которых выражены натуральными числами m и n соответственно.**

Так, если отрезок $a=9e$ состоит из отрезков b и c, причем $b=4e$, то $c=(9-4)e=5e$.

Заметим, что такой подход к сложению и вычитанию натуральных чисел связан не только с измерением длин отрезков, но и с измерением других величин.

В учебниках математики для начальных классов много задач, в которых рассматриваются различные величины и действия над ними. Определение смысла сложения и вычитания натуральных чисел, являющихся значениями величин, позволяет обосновывать выбор действия при решении таких задач.

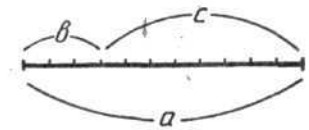


Рис 112

Рассмотрим, например, задачу: «В саду собрали 3 кг смородины и 4 кг малины. Сколько всего килограммов ягод собрали?»

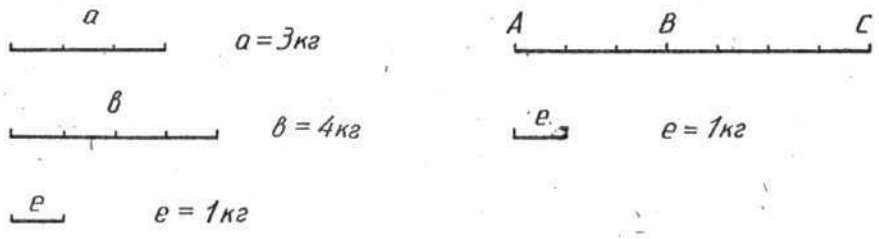


Рис. 113

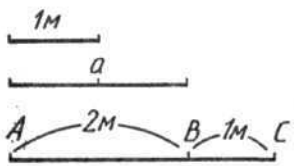


Рис. 114

Задача решается сложением. Почему?

Изобразим массу собранной смородины в виде отрезка a (рис. 113), а массу собранной малины в виде отрезка b. Тогда массу собранных ягод можно изобразить при помощи отрезка AC, состоящего из отрезка AB, равного a, и отрезка BC, равного b. Так как численное значение длины отрезка AC равно сумме численных значений отрезков AB и BC, то массу собранных ягод находим действием сложения: $3+4=7$ (кг).

Аналогично обосновывается выбор действия и при решении задачи: «На кофту пошло 2 м ткани, а на платье — на 1 м больше. Сколько метров ткани пошло на платье?»

Изобразим ткань, которая пошла на кофту, в виде отрезка a. Тогда ткань, которая пошла на платье, можно изобразить при помощи отрезка AB, равного a, и отрезка BC, изображающего 1 м (рис. 114). Так как значение длины отрезка AC равно сумме значений длин слагаемых отрезков, то количество ткани, которое пошло на платье, находим действием сложения: $2+1=3$ (м).

Упражнения

1. Постройте треугольник. Как вы найдете его периметр? Сколькими способами это можно сделать?

2. В прямоугольнике провели диагональ. Известен периметр прямоугольника и периметр одного из полученных при этом треугольников. Можете ли вы найти длину диагонали?

3. Сумма двух любых сторон треугольника равна 10 см. Вычислите его периметр.

4. В четырехугольнике провели диагональ. Известна ее длина, периметры двух образовавшихся треугольников. Можете ли вы найти периметр данного четырехугольника?

5. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются сложением:

1) Бублик стоит 6 к., а стакан молока 4 к. Сколько стоят стакан молока и бублик вместе?

2) От куска ленты отрезали 8 м, а потом еще 2 м. Сколько метров ленты отрезали?

3) Сестре 7 лет, а брат на 2 года старше сестры. Сколько лет брату?

6. Объясните, почему следующие задачи решаются вычитанием:

1) За бублик и стакан молока заплатили 10 к. Бублик стоит 6 к. Сколько стоит молоко?

2) Масса гуся 7 кг, а кролик на 3 кг легче. Узнай массу кролика.

3) Высота стола 7 дм, а высота стула 4 дм. На сколько дециметров стол выше, чем стул?

4) Саше 7 лет, он на 3 года старше сестры? Сколько лет сестре?

7. Следующие задачи решите различными способами, дайте им обоснования:

1) В одном кувшине было 4 л молока, а в другом 3 л. За обедом выпили 2 л молока. Сколько литров молока осталось?

2) От мотка провода длиной 18 м сначала отрезали 7 м, а потом 5 м провода. Сколько метров провода осталось в мотке?

64. Смысл умножения и деления чисел, являющихся значениями величин

Рассмотрим задачу для учащихся II класса: «В столовой было 4 банки сока, по 3 л в каждой банке. Сколько всего сока было в этих банках?»

Почему эту задачу решают умножением: $3\cdot4=12$ (л)?

Рисунок, приведенный к задаче, дает подсказку: чтобы узнать, сколько всего было сока в 4 банках, достаточно найти сумму 3 л + 3 л + 3 л + 3 л. Так как запись 3 л есть запись произведения $3\cdot1$ л, то полученное выражение можно преобразовать к виду $(3+3+3+3)\cdot1$. Заменив сумму четырех одинаковых слагаемых произведением $3\cdot4$, получаем $(3+3+3+3)\cdot1$ л $=(3\cdot4)\cdot1$ л $=12\times$ $\times1$ л $=12$ л.

Возможен другой подход к решению данной задачи. Прежде всего отметим, что в ней речь идет о двух единицах объема, занимаемого соком,— банках и литрах. Сначала он измерен банками, а затем его надо измерить новой единицей — литром, причем известно, что в старой единице (банке) содержится 3 новые (3 литра). Значит, $4\cdot1$ б. $=4\cdot(3$ л$)=4\cdot(3\cdot1$ л$)=(4\cdot3)\cdot1$ л $=12$ л. Описываемая ситуация представлена на рисунке 115.

Таким образом, умножение натуральных чисел отражает переход к новой, более мелкой единице величины.

Докажем это утверждение в общем виде применимо к числам — значениям длин отрезков, т. е. если отрезок a состоит из m отрезков, равных e, а отрезок e состоит из n отрезков, равных e_1, то численное значение длины отрезка a при единице длины e_1 будет равно $m\cdot n$.

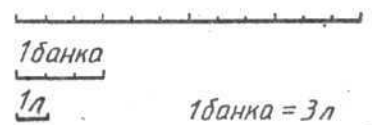


Рис. 115

Действительно, число частей отрез-

ка a, равных отрезку e_1, выражается так: $\underbrace{n+n+\ldots+n}_{m \text{ слагаемых}}$ — и потому равно $n \cdot m$. Значит $a=(m \cdot n)\, e_1$.

Итак, **умножение натуральных чисел отражает переход к новой единице длины: если натуральное число m — значение длины отрезка a при единице длины e, а натуральное число n — значение длины отрезка e при единице длины e_1, то произведение $m \cdot n$ есть значение длины отрезка a при единице длины e_1.**

Выясним, какой смысл имеет деление натуральных чисел, являющихся значениями величин.

Рассмотрим задачу: «Вместимость одной банки 3 л. Сколько потребуется банок, чтобы разлить 12 л фруктового сока?»

Чтобы решить задачу, изобразим 12 л в виде отрезка и выясним (рис. 116), сколько раз в нем укладывается отрезок, изображающий 3 л. Получаем, что 12 л : 3 л = 4 (б.).

Можно обосновать решение этой задачи иначе. В задаче рассматриваются две единицы объема, занимаемого соком, литр и банка. Так как в задаче требуется результат измерения выразить в банках, т. е. новой единице (в условии объем сока измерен в литрах), и известно, что в новой единице (банке) содержатся 3 старые (3 л), то 1 л = 1 б. : 3.

$$12 \text{ л} = 12 \cdot (1 \text{ б.} : 3) = (12 : 3) \cdot 1 \text{ б.} = 4 \cdot 1 \text{ б.} = 4 \text{ б.}$$

Видим, что деление натуральных чисел связано с переходом к новой единице величины. Покажем это в общем виде.

Пусть отрезок a состоит из m отрезков, равных e, а отрезок e_1 состоит из n отрезков, равных e. Выясним, как найти число, которым будет выражаться длина отрезка a при единице длины e_1.

Так как $e_1 = ne$, то $e = e_1 : n$. Тогда $a = me = m \cdot (e_1 : n) = (m : n)\, e_1$.

Таким образом, **деление натуральных чисел, рассматриваемых как значения длин отрезков, отражает переход к новой (более крупной) единице длины: если натуральное число m — значение длины отрезка a при единице длины e, а натуральное число n — значение длины отрезка e_1 при единице длины e, то частное $m : n$ есть значение длины отрезка a при единице длины e_1.**

Например, если $a = 12e$ и $e_1 = 2e$, то значение длины отрезка a при единице длины e_1 будет равно $6e_1$:

$$a = 12e = 12 \cdot (e_1 : 2) = (12 : 2)\, e_1 = 6e_1.$$

Эта ситуация наглядно представлена на рисунке 117.

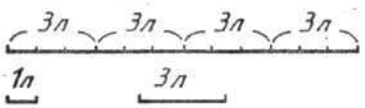


Рис. 116

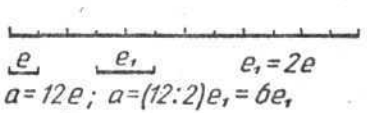


Рис. 117

В учебниках математики для начальных классов много простых задач, в которых рассматриваются различные величины и которые решаются при помощи умножения или деления. Происходит это, как правило, с привлечением наглядности. При этом умножение трактуют как сложение одинаковых слагаемых, а деление рассматривают как операцию, обратную умножению.

Упражнения

1. Как изменится значение длины отрезка:
1) при уменьшении единицы длины в 4 раза;
2) при увеличении единицы длины в 5 раз?

2. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются умножением:
1) В буфет привезли 3 ящика апельсинов, по 9 кг в каждом. Сколько килограммов апельсинов привезли?
2) Сколько стоят 3 м ткани по цене 4 р. за метр?
3) Сыну 8 лет. Отец в 4 раза старше сына. Сколько лет отцу?
4) Сестре 8 лет, она в 2 раза моложе брата. Сколько лет брату?

3. Объясните, почему каждая из нижеприведенных задач решается делением:

1) На 10 к. купили 2 одинаковых конверта. Сколько стоит конверт?
2) Шерстяное платье стоит 27 р., а туфли — в 3 раза дешевле. Сколько стоят туфли?
3) На детское пальто расходуют 2 м драпа. Сколько таких пальто можно сшить из 12 м драпа?
4) В столовой израсходовали 80 кг картофеля и 8 кг моркови. Во сколько раз больше израсходовали картофеля, чем моркови?
5) Кухонный стол стоит 24 р., в 6 раз дороже, чем табуретка. Сколько стоит табуретка?

4. Решите задачи различными способами и обоснуйте выбор способа:

1) Для уроков труда купили 4 катушки белых ниток, по 10 к. за штуку, и 6 катушек черных ниток по такой же цене. Сколько денег уплатили за эти нитки?
2) У одной закройщицы было 15 м ткани, а у другой 12 м. Из всей этой ткани они скроили платья, расходуя на каждое по 3 м ткани. Сколько всего платьев они скроили?
3) Одна корова дает в сутки в среднем 14 кг молока. Сколько килограммов молока можно получить от 10 таких коров за 7 суток?

§ 10. ЗАПИСЬ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ И АЛГОРИТМЫ ДЕЙСТВИЙ НАД НИМИ

65. Запись чисел в десятичной системе счисления

Современному человеку буквально на каждом шагу приходится иметь дело с числами. Поэтому мы должны уметь правильно называть и записывать любое число, а также производить над числами действия. И как правило, мы успешно справляемся с этим. Помогает нам тот способ записи чисел, который в настоящее время используется повсеместно и который носит название десятичной системы счисления.

Вообще **системой счисления называют язык для наименования, записи чисел и выполнения действий над ними.**

Как известно, в десятичной системе счисления для записи чисел используется 10 знаков (цифр): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, из них образуются конечные последовательности, которые являются краткими записями чисел. Например, последовательность 5457 является краткой записью числа 5 тыс. + 4 сот. + 5 дес. + 7 ед. Эту сумму принято записывать в таком виде: $5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7$.

Определение. Десятичной записью натурального числа x **называется его представление** в виде $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$, **где коэффициенты** a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 **принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и** $a_n \neq 0$.

Сумму $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ принято записывать кратко: $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$.

Числа 1, 10, 10^2, 10^3, ..., 10^n называют при таком представлении **разрядными единицами** соответственно первого, второго, ..., $n+1$-го разряда, причем 10 единиц одного разряда составляют 1 единицу следующего высшего разряда, т. е. отношение соседних разрядов равно 10 — **основанию системы счисления.**

Три первых разряда в записи числа соединяют в одну группу и называют первым классом или классом единиц. В первый класс входят единицы, десятки, сотни.

Четвертый, пятый и шестой разряды в записи числа образуют второй класс — **класс тысяч.** В него входят единицы тысяч, десятки тысяч и сотни тысяч.

Затем идет третий класс — **класс миллионов,** состоящий тоже из трех разрядов: седьмого, восьмого, девятого, т. е. из единиц миллионов, десятков миллионов и сотен миллионов.

Последующие три разряда также образуют новый класс и т. д. Выделение классов единиц, тысяч, миллионов и т. д. создает удобства для записи и прочтения чисел.

В десятичной системе счисления все числа можно не только представить в виде $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$, где a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и $a_n \neq 0$, но и всем им дать название, имя. Это достигается следующим образом: имеются названия первых десяти чисел, затем из них в соответствии с определением десятичной записи и прибавления еще немногих слов образуются наименования последующих чисел. Так, числа второго десятка (они представляются в виде $1 \cdot 10 + a_0$) образуются из соединения первых десяти названий и несколько измененного слова **«десять»** («дцать»):

одиннадцать — один на десять;

двенадцать — два на десять и т. д.

Может быть, естественнее было говорить «два и десять», но наши предки предпочитали говорить «два на десять», это и сохранилось в нашей речи.

Слово **«двадцать»** обозначает два десятка.

Названия чисел третьего десятка (это числа вида $2 \cdot 10 + a_0$) получаются путем прибавления к слову «двадцать» названий чисел первого десятка: двадцать один, двадцать два и т. д.

Продолжая счет далее, мы получим названия чисел четвертого, пятого, шестого, седьмого, восьмого, девятого и десятого десятков. Названия этих чисел образуются также, как и в пределах третьего десятка, только в трех случаях появляются новые слова: **сорок** (для обозначения четырех десятков), **девяносто** (для обозначения девяти десятков) и **сто** (для обозначения десяти десятков).

Названия чисел, больших ста (т. е. чисел вида $1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$), составляются из слова «сто» и названий чисел первого и последующего десятков. Таким путем получаются наименования: сто один, сто два, ..., сто двадцать и т. д. Отсчитав новую сотню, мы будем иметь две сотни, которые кратко называются **двести.** Для получения чисел, больших двухсот, мы снова воспользуемся названиями чисел первого и последующих десятков, присоединяя их к слову «двести». Затем будем отсчитывать последующие сотни и после каждой новой сотни будем получать особое название: **триста, четыреста, пятьсот** и т. д. до тех пор, пока не отсчитаем десять сотен, которые носят особое название **«тысяча».**

Счет за пределами тысячи ведется так: прибавляя к тысяче по единице (тысяча один, тысяча два и т. д.), получим две тысячи, три тысячи и т. д. Когда же мы отсчитаем тысячу тысяч, то это число получит особое название **«миллион».** Далее считаем миллионами до тех пор, пока дойдем до тысячи миллионов. Полученное новое число — тысяча миллионов — имеет особое название **«миллиард».** Миллион миллионов называется **биллионом.** В вычислениях миллион принято записывать в виде 10^6, миллиард — 10^9, биллион — 10^{12}. По аналогии можно получить записи еще больших чисел.

Таким образом, для того, чтобы назвать все натуральные числа в пределах миллиарда, потребовалось только 16 различных слов: **один, два, три,** четыре, пять, **шесть, семь,** восемь, девять, **десять, сорок, девяносто,** сто, тысяча, **миллион, миллиард.** Остальные названия чисел (в пределах миллиарда) получаются из этих основных.

Десятичная запись натурального числа дает еще один способ сравнения чисел.

Если числа x и y — натуральные числа, запись которых выполнена в десятичной системе счисления, т. е.

$$x=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0,$$
$$y=b_m\cdot 10^m+b_{m-1}\cdot 10^{m-1}+\ldots+b_1\cdot 10+b_0,$$

то число x меньше числа y, если выполнено одно из условий:

1) $n<m$ (число разрядов в записи числа x меньше, чем в записи числа y);

2) $n=m$, но $a_n<b_m$;

3) $n=m$, $a_n=b_m$, ..., $a_k=b_k$, но $a_{k-1}<b_{k-1}$.

Это утверждение мы принимаем без доказательства. Пользуясь им, легко вести сравнение чисел. Например: а) $3456<12\,349$, потому что в записи числа 3456 цифр меньше, чем в записи числа 12 349; б) $3456<4579$, так как при одинаковом количестве цифр в записи чисел цифра старшего разряда в числе 3456 меньше цифры того же разряда в числе 4579; в) $3456<3476$, так как при одинаковом количестве цифр в записи чисел и одинаковых цифрах, обозначающих тысячи и сотни, цифра десятков в числе 3456 меньше цифры того же разряда в числе 3476.

Вопросы наименования и записи чисел рассматриваются в начальных классах по концентрам в темах, носящих название «Нумерация». Говоря о нумерации, здесь обращаются только к способам наименования и записи чисел. Поэтому термины «нумерация» и «система счисления» не тождественны — изучение систем счисления предполагает еще и рассмотрение действий над многозначными числами.

В начальном курсе математики (и в курсе математики средних классов) десятичной записью натурального числа считают его представление в виде суммы так называемых разрядных слагаемых. Например, сумма $5000+400+50+7$ представляет собой десятичную запись числа 5457. Представление числа в виде таких сумм удобно для его наименования: пять тысяч четыреста пятьдесят семь.

Упражнения

1. Какая сумма является десятичной записью числа.

1) 7452; 2) 772; 3) 20 308; 4) 245 300?

2. Какие числа представлены следующими суммами:

1) $2\cdot 10^3+1\cdot 10^2+8\cdot 10+9$; 3) $3\cdot 10^4+10^3+4\cdot 10+6$;

2) $7\cdot 10^3+2\cdot 10$; 4) 10^4+10^2?

3. Решите задачи:

1) Какое число содержит 3 сотни тысяч 2 десятка тысяч и 5 тысяч? 6 десятков тысяч и 8 тысяч? 5 сотен тысяч и 9 тысяч? 8 тысяч 7 сотен и 5 десятков? 4 сотни и 6 единиц?

2) Назови и напиши числа, в которых: 356 единиц класса тысяч; 300 единиц первого класса; 25 единиц второго класса и 180 единиц первого класса; единиц второго класса и 6 единиц первого класса; 50 единиц второго класса и 50 единиц первого класса.

3) Напиши цифрами и назови, единицы каких классов и разрядов отсутствуют в этих числах: триста двадцать пять миллионов; пятьсот миллионов двести пять тысяч; пятьдесят миллионов сто шестьдесят девять; тридцать миллионов сорок.

4) Представь числа 6952, 5200, 7805, 9036 в виде суммы разрядных слагаемых.

5) Сравни числа:

325 174 и 32 500 184; 3 001 257 и 3 100 257;
418 000 035 и 418 035; 8 060 060 и 8 006 006.

6) Запиши все двузначные числа, в которых число десятков в 3 раза меньше числа единиц.

4. Напишите наименьшее трехзначное число, кратное 3, так, чтобы первая цифра его была 8 и все цифры были бы различны. Существует ли наибольшее трехзначное число, удовлетворяющее данным условиям?

5. Найдите пятизначное число, каждая цифра которого на единицу больше предыдущей, а сумма его цифр равна 30.

6. Какую цифру нужно приписать к числу 10 справа и слева, чтобы получилось число, делящееся на 9?

7. Сумма цифр двузначного числа равна 9, причем цифра десятков вдвое больше цифры единиц. Найдите это число.

8. Сумма двух чисел 715. Одно из них оканчивается нулем. Если этот нуль зачеркнуть, то получится второе число. Найдите эти числа.

9. Сумма двух натуральных чисел 352. Если к меньшему из них справа приписать нуль, то получится большее число. Найдите эти числа.

66. О возникновении и развитии способов записи целых неотрицательных чисел

Как давно люди пользуются десятичной системой записи чисел? Историки считают, что десятичная система сложилась в Индии примерно в VI веке н. э. У индийцев ее заимствовали арабы, а в Европе десятичная система получила распространение в X—XIII веках.

А как записывали люди числа до возникновения десятичной системы счисления?

Понятие числа возникло в глубокой древности. Тогда же возникла необходимость в записи чисел. Еще до появления письменности люди умели называть числа, вести счет. В этом им помогали различные приспособления, и прежде всего пальцы рук и ног. Употреблялся и такой вид инструментального счета, как деревянные палочки с зарубками, шнуры и веревки с узлами. Конечно, способ

«записи» чисел при помощи зарубок или узлов был не слишком удобным, поскольку для записи больших чисел приходилось делать много зарубок или узлов, что затрудняло не только запись, но и сравнение чисел друг с другом, трудно было выполнять и действия над числами. Поэтому возникли иные, более экономные способы записи чисел: счет стали вести группами, состоящими из одинакового числа элементов. Этому способствовало развитие счета при помощи пальцев рук и ног. Переход человека к пальцевому счету привел к созданию различных систем счисления: пятеричной, десятичной, двадцатеричной и др.

Вообще самой старой системой счисления считается двоичная. Она возникла, когда человек вел счет не по пальцам, а при помощи рук, т. е. когда единицей низшего разряда являлась одна рука, а единицей высшего — две руки. Следы этой системы сохранились и сегодня — они выражаются в стремлении считать парами.

Постепенно под влиянием растущих экономических потребностей человечество создавало методы счета. Процесс этот был стихийным и долгим. Начинался он в далекие времена, когда люди вырабатывали первые математические понятия, и в частности понятия натурального числа и счета.

Их дальнейшее развитие происходило в эпоху формирования древнейших государств — Вавилона, Египта, Китая и др., т. е. около пяти тысяч лет тому назад. В этот период были созданы новые способы записи чисел.

В Древнем Вавилоне считали группами по шестьдесят, т. е. система счисления здесь была шестидесятеричная. Например, число 137 вавилонский математик представлял себе так: $137=2\cdot60+17$. Конечно, записывалось это число другими знаками — треугольными клиньями. Дело в том, что записи древние вавилоняне производили на глиняных табличках путем выдавливания из них треугольных клиньев. Потом эти таблички сушили и обжигали.

Для записи чисел использовались положения клина: вертикальное — острием вниз и горизонтальное — острием влево. При этом знак ▾ означал единицу и шестьдесят, знак ◂ — десяток. Другие числа изображались при помощи этих знаков и действия сложения. Например, число 5 изображалось так: ▾▾▾▾▾, а число 137 так: ▾▾◂◂▾▾▾. Последняя запись есть запись числа в шестидесятеричной системе: $60+60+10+7=2\cdot60+17$.

Однако изобретенная в Древнем Вавилоне запись чисел имела недостатки: в ней трудно было изображать большие числа, не было специального знака для основания системы счисления — числа 60, что приводило к разночтению отдельных записей.

Почему в основу своей системы счисления вавилоняне положили число 60? Однозначно ответить на этот вопрос трудно. Отметим только, что древние вавилоняне располагали достаточно большим запасом знаний в различных областях: математике, астрономии. Существует предположение, что основой для создания шестидесятеричной системы счисления послужило деление окружности на 360

1 – 𓏺, 10 – 𓎆, 100 – 𓍢, 1000 – 𓆼

Рис. 118

равных частей, которое, в свою очередь, было произведено ими в соответствии с разделением года на 360 дней.

Остатки этой системы счисления сохранились и по сей день: к делению окружности на 360° можно добавить еще измерение углов градусами, минутами и секундами.

Древние египтяне считали десятками. Но специальные знаки у них были только для разрядов: единиц, десятков, сотен, тысяч и т. д. Числа от одного до девяти записывались с помощью палочек (рис. 118).

Например, число 122 египтяне записывали так: 𓍢𓎆𓎆𓏺𓏺, а число 1314 имело вид 𓆼𓍢𓍢𓍢𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺.

Записи производились преимущественно красками на папирусе. Иногда же материалом для записи служили камень, дерево, кожа, холст, черепки. Текст записывался строками справа налево или столбцами сверху вниз.

Некоторые из египетских папирусов сохранились до наших дней. Один из них, так называемый «Московский математический папирус», хранится в Государственном музее изобразительных искусств им. А. С. Пушкина в Москве и датируется 2000—1800 годами до н. э.

Интересно заметить, что действие умножения выполнялось египтянами путем удвоения. Например, чтобы умножить 15 на 17, надо было произвести следующие действия:

$$15\cdot(1+2\cdot2\cdot2\cdot2)=15\cdot1+15\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=15\cdot1+30\cdot2\cdot2\cdot2=$$
$$=15+60\cdot2\cdot2=15+120\cdot2=15+240=255.$$

Действие деления рассматривалось как действие, обратное умножению, т. е. подбиралось такое число, которое при умножении на делитель давало бы делимое.

Вообще древние египтяне и вавилоняне владели достаточно большим объемом математических знаний, но все они были преимущественно опытного характера. По существу, отсутствовали обобщения и доказательства, т. е. математическая наука только складывалась.

Большой вклад в ее дальнейшее развитие внесли ученые Древней Греции: Фалес (624—547 гг. до н. э.), Пифагор (ок. 580—500 гг. до н. э.), Демокрит (ок. 460—370 гг. до н. э.), Платон (427—347 гг. до н. э.), Евклид (ок. 300 г. до н. э.), Архимед (ок. 287—212 гг. до н. э.), Эратосфен (ок. 276—194 гг. до н. э.) и др. Это целая эпоха в истории развития учения о числе[1]

Мы отметим только, что в Древней Греции родилась еще одна

[1] См. литературу: Болгарский Б. В. Очерки по истории математики.— Минск, 1974; Берман Г. Н. Число и наука о нем.— М., 1960; Депман И. Я. Мир чисел.— М., 1975.

система записи чисел — алфавитная. В ней числа изображались буквами греческого алфавита. Первые девять букв алфавита изображали числа от 1 до 9, следующие девять — десятки (10, 20, 30, ..., 90) и последние девять — сотни (100, 200, ..., 900). Для того, чтобы отличить числа от записи слов, над числами ставилась черта. Например, в этой системе число 543 записывалось так: $\overline{\varphi\mu\gamma}$ ($\overline{\varphi}$ — 500, $\overline{\mu}$ — 40, $\overline{\gamma}$ — 3). Для изображения чисел, больших тысячи, употреблялись дополнительные символы.

Две с небольшим тысячи лет тому назад почти все страны Западной Европы и многие страны Азии были покорены древними римлянами. Ориентация на захватнические войны привела к тому, что в Римской империи математика не развивалась, она использовалась только для практических целей. Из того немногого, что оставил Древний Рим, это еще один способ записи чисел. В римской системе счисления так же, как и в древнеегипетской, есть узловые числа:

единица — I	пятьдесят — L
пять — V	сто — C
десять — X	пятьсот — D
	тысяча — M

Все другие числа получаются из узловых при помощи двух арифметических действий: сложения и вычитания. Вычитание производится тогда, когда знак, соответствующий меньшему узловому числу, стоит перед знаком большего узлового числа. Например, IV — четыре (5 — 1 = 4), XC — девяносто (100 — 10 = 90), XL — сорок (50 — 10 = 40).

Запишем несколько чисел в римской нумерации.

165 — это сто (C) плюс шестьдесят, т. е. пятьдесят плюс десять (LX), плюс пять (V), следовательно, число 165 записывается как CLXV.

374 — это триста (CCC) плюс семьдесят, т. е. пятьдесят плюс 2 раза по десять (LXX), плюс четыре (IV), следовательно, 374 записывается так: CCCLXXIV.

Числа четырех-, пяти- и шестизначные записываются с помощью буквы m (от лат. слова mille — тысяча), слева от которой записываются тысячи, а справа — сотни, десятки, единицы. Так, запись $XXIX_{m}DCXXXV$ есть запись числа 29 635, а запись $CXXXVII_{m}DCCXLV$ является записью числа 137 745.

В V—XII веках значительное развитие математики происходило в странах Востока: в Индии и на Ближнем Востоке.

В Индии и Китае математика зародилась примерно пять тысяч лет назад, т. е. тогда же, когда и в Египте. Ученые-историки отмечают также, что индийская наука и наука греческая были взаимосвязаны. Но если у греков преимущественное развитие получила геометрия, то в Индии более существенные результаты были получены в области арифметики, алгебры и тригонометрии. Особенно ценен вклад индийских ученых в арифметику — они изобрели

десятичную систему счисления, т. е. тот способ записи и чтения чисел, которым теперь пользуется все человечество. Датируется это событие VI в. н. э. В чем состояло это открытие? Ведь люди с древних времен вели запись чисел.

Дело в том, что при таком способе записи чисел, который придумали индийские математики, значение каждой цифры в записи числа зависит от ее места, позиции. Например, одна и та же цифра 7 в числе 703 обозначает 7 сотен, в числе 72 — семь десятков, а в числе 7230 — семь тысяч. Оказалось, что при помощи десяти цифр можно записать любое число. Поэтому десятичную систему счисления называют **позиционной**. Кроме того, в Индии впервые стал употребляться нуль для обозначения отсутствующих разрядных единиц, что тоже сыграло большую роль в усовершенствовании записи числа и упрощении вычислений.

Конечно, привычная для нас запись нуля появилась не сразу. Сначала, если в числе не было какого-нибудь разряда, индийцы вместо названия цифры говорили слово «пусто», а при записи на месте «пустого» разряда ставили точку. Позднее вместо точки стали рисовать кружок, который назывался «сунья», что на языке хинди значит «пусто».

При переводе на арабский язык слово «сунья» превратилось в слово «сифр», которое на русском языке звучит как «цифра».

Цифрами мы называем все десять знаков, используемых для записи чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Но еще двести лет назад цифрой назывался только один знак — 0.

Цифры, с помощью которых записываются числа в десятичной системе счисления, тоже были придуманы математиками Древней Индии. Хотя, конечно, их первоначальное написание значительно отличается от современного. Нынешняя форма цифр установилась только после изобретения книгопечатания — в XV веке.

Почему же цифры, изобретенные в Индии, часто называют арабскими? Дело в том, что возникшее в VII веке на Аравийском полуострове государство арабов за двести лет подчинило себе значительное число государств, стоящих на более высокой ступени развития. В состав Арабского халифата входили, например, Северная Индия, Египет, Средняя Азия, Месопотамия, Персия, Закавказье, Северная Африка и другие государства. Столицей этого огромного государства был город Багдад, который стал центром арабской культуры. Арабы понимали значение науки и тщательно собирали, изучали и переводили на свой язык труды ученых завоеванных стран, в том числе Греции, Индии, Средней Азии.

Однако арабские математики не только сохранили труды выдающихся ученых древности, но и внесли большой вклад в развитие математики.

Выдающимся ученым IX века был узбекский (хорезмский) математик Мухаммед бен Муса аль-Хорезми. Его книга «Китаб аль-Джебр», где изложены правила решения арифметических задач и уравнений, дала имя науке алгебре.

В другой своей книге аль-Хорезми описал индийскую арифметику, т. е. десятичную систему счислений, изобретенную в Индии. Триста лет спустя, т. е. в XII веке, ее перевели на латинский язык и она стала первым учебником арифметики для всех европейских народов.

Вследствие того что десятичную систему счисления в странах Европы изучали по книге, написанной автором, жившим в Арабском государстве, индийские цифры десятичной системы стали неправильно называться арабскими цифрами.

Начиная с XII века в Западной Европе после долгого застоя зарождается интерес к математике, чему способствует расширение торговли, которое повлекло за собой значительное усложнение счета.

Распространению десятичной системы счисления в Европе способствовала «Книга абака» Леонардо Фибоначчи, изданная в 1202 году. С XIII века начинается внедрение десятичной системы, и к XVI веку она стала повсеместно использоваться в странах Западной Европы.

Упражнения

1. Запишите в десятичной системе счисления: XXVII, XXI, XLIV, LXII, LXXVIII, XCV, CDXXIII, MCDVII, MCDXIX, MDCCCLXXI.
2. Запишите в римской системе счисления: 24, 49, 117, 204, 468, 1243, 1905, 1941, 1986, 2000.

67. О записи чисел в Древней Руси

Предки русского народа — славяне. У славян, как и других народов, первые математические представления родились в практической деятельности. Без умения считать и измерять нельзя было вести торговлю, а славяне торговали и с греками, и с арабами, и с другими народами. В X веке — веке наибольшего расцвета и могущества древнерусского государства у славян появилась письменность.

Основа славянского алфавита была позаимствована у средневековых греков — византийцев. Поэтому и славянская нумерация по своей идее совпадает с греческой, т. е. числа в ней изображались буквами алфавита, над которыми ставили особый знак — титло (рис. 119).

Числа одиннадцать, двенадцать и т. д. до девятнадцати записывались соответственно так: $\overline{\text{АІ}}, \overline{\text{ВІ}}, \ldots, \overline{\text{ѲІ}}$; числа двадцать один, двадцать два и т. д. до двадцати девяти — $\overline{\text{КА}}, \overline{\text{КВ}}, \ldots, \overline{\text{КѲ}}$ и т. д. Титло ставилось только над одной из цифр. Порядок цифр при записи числа был такой же, как в его устном названии. Мы говорим, например, «двенадцать», называя сначала цифру единиц, потом десяток. Славяне так и писали: $\overline{\text{ВІ}}$,

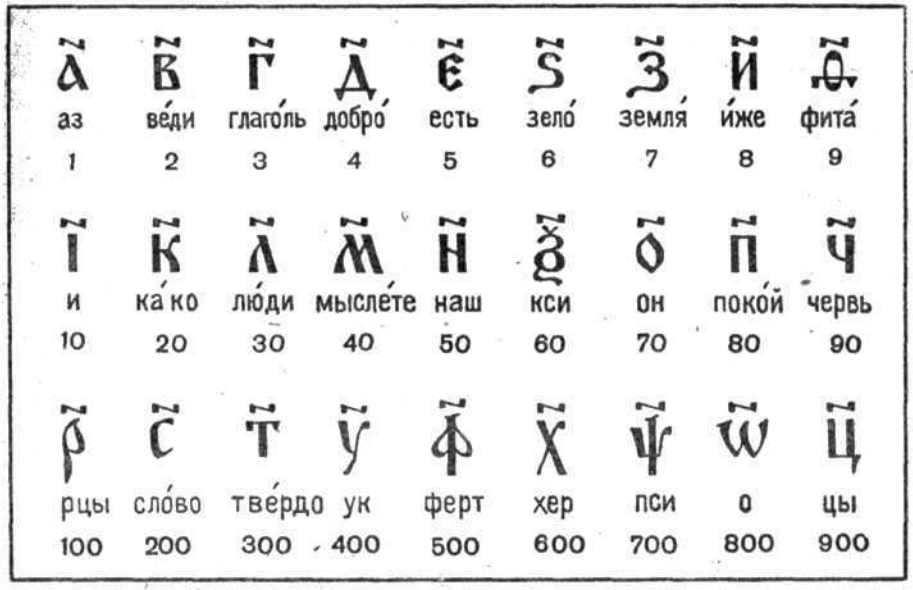


Рис. 119

т. е. впереди писали цифру «два», а за нею цифру, обозначавшую десяток. Наоборот, в числе двадцать четыре мы справа называем десятки, потом единицы; у славян это отражалось в записи числа: они писали $\overline{\text{КД}}$.

Славянская нумерация непозиционная, поскольку значение буквы в записи числа не менялось в зависимости от позиции, которую она занимала. Пользуясь этой нумерацией, можно было записывать большие числа.

Кроме того, эта система записи чисел позволяла выполнять арифметические действия «столбиком», т. е. почти так, как это происходит сейчас.

Названия чисел до тысячи в Древней Руси были почти такими же, как и сейчас, хотя имеются небольшие отличия в произношении: например, один назывался «един», двадцать — «двадесять».

О том, что математические знания наших предков-славян были достаточно обширными, говорит факт использования букв алфавита для записи больших чисел без введения новых знаков. Так, знак $\overline{\text{А}}$ обозначал тысячу, $\textcircled{\text{А}}$ — число которое называли тьмой (сначала это было 10^4, потом 10^6), знак $\overline{\text{А}}$ обозначал легеон, т. е. 10^{12}, знак $\dot{\overline{\text{А}}}$ — леодр, т. е. 10^{24}, $\ddot{\overline{\text{А}}}$ — ворон, т. е. 10^{48}, $\underline{\overline{\text{А}}}$ — колода, т. е. 10^{49}. Про число «ворон» говорили, что «более сего несть разумевати», а о колоде — «сего числа несть больше».

Страшный удар русской культуре и науке был нанесен в период трехсотлетнего монгольского ига. За это время наука Западной Европы сделала большой шаг вперед, овладев десятичной системой счисления и другими достижениями математики арабов и индийцев. Понадобилось несколько столетий, чтобы русская наука снова заняла достойное место в мире.

В конце XVI века, при Иване Грозном, на Руси появляются первые печатные математические книги, цель которых — облегчить счет при решении различных практических задач. Запись чисел в них выполнялась в славянской системе счисления.

Важную роль в развитии русской науки сыграла книга «Арифметика, сиреч наука числительная», написанная Леонтием Филипповичем Магницким. Она была издана при Петре I, в 1703 году, на славянском языке, но все вычисления в ней выполнялись в десятичной системе счисления. Долгое время эта книга была настольной для всех образованных людей, так как содержала не только математический материал, но и сведения из астрономии, навигации и некоторых разделов других наук.

Леонтий Филиппович Магницкий (1669—1739) был первым русским выдающимся педагогом-математиком. Родом он из Осташковской патриаршей слободы бывшей Тверской губернии. Историки считают, что происходил он из крестьян и что фамилия его отца была Телятин. Фамилия Магницкий была ему присвоена по указу Петра I, который высоко ценил огромные знания Магницкого и говорил, что он притягивает к себе знания, как магнит.

Книга Л. Ф. Магницкого способствовала распространению десятичной системы счисления в России, она оказала заметное влияние на развитие ее научной мысли.

68. Сложение многозначных чисел в десятичной системе счисления

Выясним, как на практике выполняется сложение натуральных чисел.

Если числа a и b однозначные, то, чтобы найти сумму, достаточно сосчитать число элементов в объединении таких множеств A и B, что $n(A)=a$, $n(B)=b$ и $A \cap B = \varnothing$. Но чтобы всякий раз, выполняя сложение таких чисел, не обращаться к множествам и счету, все суммы, которые получаются при сложении двух однозначных чисел, запоминают.

Все такие суммы записывают в особую таблицу, которая называется таблицей сложения однозначных чисел.

Если числа a и b многозначные, то смысл действия сложения сохраняется и здесь, но технически найти сумму путем пересчета элементов в объединении непересекающихся множеств A и B, таких, что $n(A)=a$, $n(B)=b$, чаще всего не представляется возможным.

Как известно, многозначные числа складывают «столбиком». Но

каковы теоретические положения, которые лежат в основе этого правила?

Рассмотрим сумму $273+3526$. Представим слагаемые в виде сумм степеней десяти с коэффициентами: $273+3526=(2\cdot10^2+7\cdot10+3)+(3\cdot10^3+5\cdot10^2+2\cdot10+6)$. Раскроем скобки в полученном выражении, поменяем местами слагаемые так, чтобы единицы оказались рядом с единицами, десятки — с десятками и т. д., и заключим их в скобки. Все это можно сделать на основании соответствующих законов сложения. Действительно, сочетательный закон разрешает записать выражение без скобок: $2\cdot10^2+7\cdot10+3+3\cdot10^3+5\cdot10^2+2\cdot10+6$. На основании переместительного закона поменяем местами слагаемые: $3\cdot10^3+2\cdot10^2+5\cdot10^2+7\cdot10+2\cdot10+3+6$. Согласно сочетательному закону произведем группировку: $3\cdot10^3+(2\cdot10^2+5\cdot10^2)+(7\cdot10+2\cdot10)+(3+6)$. Вынесем за скобки в первой выделенной группе число 10^2, а во второй — 10. Это можно сделать в соответствии с распределительным законом умножения относительно сложения: $3\cdot10^3+(2+5)\cdot10^2+(7+2)\cdot10+(3+6)$. Видим, что сложение данных чисел 273 и 3526 свелось к сложению однозначных чисел, изображенных цифрами соответствующих разрядов. Эти суммы находим по таблице сложения: $3\cdot10^3+7\cdot10^2+9\cdot10+9$.

Полученное выражение есть десятичная запись числа 3799.

Вообще, известное правило сложения чисел «столбиком» основывается на:

способе записи чисел в десятичной системе счисления;

переместительном и сочетательном законах сложения;

распределительном законе умножения относительно сложения;

таблице сложения однозначных чисел.

Покажем, что и в том случае, когда сумма однозначных чисел становится равной или больше 10, в основе правила сложения лежат те же теоретические факты. Рассмотрим, например, сумму $248+936$.

Представим слагаемые в виде сумм степеней десяти с коэффициентами:

$$(2\cdot10^2+4\cdot10+8)+(9\cdot10^2+3\cdot10+6).$$

Воспользуемся законами сложения, распределительным законом умножения относительно сложения и преобразуем данное выражение к такому виду: $(2+9)\cdot10^2+(4+3)\cdot10+(8+6)$.

Видим, что и в этом случае сложение данных чисел свелось к сложению однозначных чисел, но суммы $2+9$, $8+6$ превышают число 10, и поэтому полученное выражение не является десятичной записью какого-то числа. Необходимо сделать так, чтобы коэффициенты перед степенями 10 оказались меньше 10. Для этого выполним ряд преобразований. Сначала сумму $8+6$ представим в виде $10+4$:

$$(2+9)\cdot10^2+(4+3)\cdot10+(10+4).$$

Теперь, воспользовавшись законами сложения и умножения, приведем полученное выражение к виду

$$(2+9)\cdot 10^2+(4+3+1)\cdot 10+4.$$

Суть последнего преобразования ясна: десяток, который получился при сложении единиц, мы прибавили к десяткам данных чисел.

И наконец, представив сумму $2+9$ в виде $1\cdot 10+1$, получаем:

$$(1\cdot 10+1)\cdot 10^2+8\cdot 10+4, \text{ откуда}$$
$$1\cdot 10^3+1\cdot 10^2+8\cdot 10+4.$$

Полученное выражение есть десятичная запись числа 1184. Следовательно, $248+936=1184$.

В общем виде алгоритм сложения многозначных чисел, записанных в десятичной системе счисления, формулируется так:

1. Записываем второе слагаемое под первым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.

2. Складываем цифры разряда единиц. Если сумма меньше десяти, ее записываем в разряд единиц ответа и переходим к следующему разряду (десятков).

3. Если сумма цифр единиц больше или равна 10, то представляем ее в виде $10+c_0$, где c_0 — однозначное число; записываем c_0 в разряд единиц ответа и прибавляем 1 к цифре десятков первого слагаемого, после чего переходим к разряду десятков.

4. Повторяем те же действия с десятками, потом с сотнями и т. д. Процесс заканчиваем, когда оказываются сложенными цифры старших разрядов.

В начальном курсе математики правило сложения многозначных чисел, по существу, формулируется при изучении письменного сложения трехзначных чисел. Этому правилу и записи сложения «столбиком» предшествует объяснение конкретного случая:

$$246+123=(200+40+6)+(100+20+3)=(200+100)+(40+20)+$$
$$+(6+3)=300+60+9=369.$$

Обоснуем каждый шаг выполняемых преобразований.

Сначала числа 246 и 123 представляются в виде суммы разрядных слагаемых (т. е. используется, по существу, способ записи чисел в десятичной системе счисления). Следующий этап — к сотням прибавляются сотни, к десяткам — десятки, к единицам — единицы, что возможно, если говорить школьным языком, на основании правила прибавления суммы к сумме, которое является следствием переместительного и сочетательного законов сложения. Затем находятся суммы в скобках. Поскольку слагаемые являются так называемыми круглыми числами, т. е. оканчиваются нулем, или однозначными числами, как в последней скобке, то их сложение происходит с опорой на таблицу сложения однозначных чисел. Выражение $300+60+9$ есть сумма разрядных слагаемых (т. е. является десятичной записью числа), поэтому его можно записать в виде 369.

Таким образом, сложение данных чисел 246 и 123 свелось к поразрядному сложению единиц, десятков и сотен, что удобно делать «столбиком»:

$$\begin{array}{r} 246 \\ +\ 123 \\ \hline 369 \end{array}$$

Упражнения

1. На примере сложения чисел 237 и 526 покажите, какие теоретические факты лежат в основе алгоритма сложения многозначных чисел.

2. При изучении алгоритма сложения трехзначных чисел в начальной школе последовательно рассматриваются случаи сложения $231+342$, $425+135$, $237+526$, $529+299$. Каковы особенности сложения в каждом из них?

3. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются сложением, и решите их:

1) В колхозе 115 лошадей, 327 свиней и 276 коров. Сколько всего голов скота в колхозе?

2) Из двух городов вышли навстречу друг другу два поезда. Один из них прошел до встречи 266 км, другой 187 км. Найти расстояние между городами.

3) Магазин продал 308 тетрадей в клетку, что на 153 тетради меньше, чем в линейку. Сколько тетрадей в линейку продал магазин?

4. Вычислите устно значение выражения. Использованный прием обоснуйте:

1) $2746+7254+9876$;
2) $7238+8978+2762$;
3) $(4729+8473)+5271$;
4) $4232+7419+5768+2591$;
5) $(357+768+589)+(332+211+643)$.

5. Какая сумма больше: $4096+5267+2307+625$ или $3805+6341+1911+216$?

6. Решение задачи запишите в виде числового выражения, а затем найдите его значение:

1) В одну школу привезли 298 парт, а в другую — на 123 парты больше. Сколько парт привезли в обе школы?

2) В июне в санатории было 158 рыбаков с Дальнего Востока, в июле — на 36 человек больше, а в августе — на 217 человек больше, чем в июле. Сколько всего рыбаков отдохнуло за эти три месяца?

3) Из двух городов вышли навстречу друг другу два поезда. Один из них прошел до встречи 227 км, это на 64 км меньше, чем прошел другой. Найти расстояние между городами.

69. Вычитание многозначных чисел в десятичной системе счисления

Вычитание однозначного числа b из однозначного или двузначного числа a, не превышающего 18, сводится к поиску такого числа c, что $a=b+c$, и происходит с опорой на таблицу сложения однозначных чисел.

Если числа a и b многозначные и $b<a$, то смысл действия вычитания остается тем же, что и для вычитания в пределах 20, но техника нахождения разности становится иной.

Как известно, многозначные числа вычитают «столбиком». Выясним, каковы теоретические основы этого алгоритма.

Рассмотрим разность $769-547$. Представим данные числа в виде сумм степеней десяти с коэффициентами: $769-547=(7\cdot10^2+6\cdot10+9)-(5\cdot10^2+4\cdot10+7)$. Чтобы вычесть из числа $7\cdot10^2+6\cdot10+9$ сумму $5\cdot10^2+4\cdot10+7$, достаточно вычесть из нее каждое слагаемое одно за другим, поэтому можно записать: $(7\cdot10^2+6\cdot10+9)-5\cdot10^2-4\cdot10-7$.

Будем теперь вычитать из суммы $7\cdot10^2+6\cdot10+9$ числа $5\cdot10^2$, $4\cdot10$, 7. Чтобы вычесть число из суммы, достаточно вычесть его из какого-нибудь одного слагаемого. Поэтому число $5\cdot10^2$ вычтем из слагаемого $7\cdot10^2$, число $4\cdot10$ — из слагаемого $6\cdot10$, а число 7 — из слагаемого 9:

$$(7\cdot10^2-5\cdot10^2)+(6\cdot10-4\cdot10)+(9-7).$$

На основании распределительного свойства умножения относительно вычитания выносим за скобки 10^2 и 10:

$$(7-5)\cdot10^2+(6-4)\cdot10+(9-7).$$

Видим, что вычитание данных чисел 769 и 547 свелось к вычитанию однозначных чисел, изображенных цифрами соответствующих разрядов. Разности $7-5$, $6-4$, $9-7$ находим по таблице сложения:

$$2\cdot10^2+2\cdot10+2.$$

Полученное выражение есть десятичная запись числа 222. Следовательно, $769-547=222$.

Вообще правило вычитания «столбиком» основывается на:

способе записи чисел в десятичной системе счисления;

правилах вычитания числа из суммы и суммы из числа;

распределительном законе умножения относительно вычитания;

таблице сложения однозначных чисел.

Покажем, что и в том случае, когда в каком-нибудь разряде уменьшаемого стоит однозначное число, меньшее числа в том же разряде вычитаемого, в основе правила вычитания лежат те же теоретические факты. Рассмотрим, например, разность $540-126$.

Представим данные числа в виде сумм степеней 10 с коэффициентами: $(5\cdot10^2+4\cdot10+0)-(1\cdot10^2+2\cdot10+6)$.

Так как из числа 0 нельзя вычесть 6, то выполнить вычитание,

так же как и в первом случае, невозможно. Поэтому возьмем из числа 540 один десяток и представим его в виде 10 единиц:

$$(5\cdot10^2+3\cdot10+10)-(1\cdot10^2+2\cdot10+6).$$

Если теперь воспользуемся правилами вычитания суммы из числа и числа из суммы, то придем к выражению

$$(5\cdot10^2-1\cdot10^2)+(3\cdot10-2\cdot10)+(10-6).$$

Применим распределительный закон умножения относительно вычитания и, воспользовавшись таблицей сложения, получим:

$$(5-1)\cdot10^2+(3-2)\cdot10+(10-6)=4\cdot10^2+1\cdot10+4=414.$$

В общем виде алгоритм вычитания многозначных чисел, записанных в десятичной системе счисления, формулируется так. Пусть заданы числа

$$x=a_n\cdot10^n+\ldots+a_1\cdot10+a_0,$$
$$y=b_k\cdot10^k+\ldots+b_1\cdot10+b_0.$$

1. Записываем вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.

2. Если цифра в разряде единиц вычитаемого не превосходит соответствующей цифры уменьшаемого, вычитаем ее из цифры уменьшаемого, после чего переходим к следующему разряду.

3. Если цифра единиц вычитаемого больше цифры единиц уменьшаемого, т. е. $a_0<b_0$, а цифра десятков уменьшаемого отлична от нуля, то уменьшаем цифры десятков уменьшаемого на 1, одновременно увеличив цифру единиц уменьшаемого на 10, после чего вычитаем из числа $10+a_0$ число b_0 и записываем результат в разряде единиц разности, далее переходим к следующему разряду.

4. Если цифра единиц вычитаемого больше цифры единиц уменьшаемого и цифры, стоящие в разряде десятков, сотен и т. д. уменьшаемого, равны нулю, то берем первую, отличную от нуля цифру в уменьшаемом (после разряда единиц), уменьшаем ее на 1, все цифры в младших разрядах до разряда десятков включительно увеличиваем на 9, а цифру в разряде единиц — на 10, вычитаем b_0 из $10+a_0$, записываем результат в разряде единиц разности и переходим к следующему разряду.

5. В следующем разряде повторяем описанный процесс.

6. Процесс вычитания заканчивается, когда производится вычитание из старшего разряда уменьшаемого.

В начальном курсе математики правило вычитания многозначных чисел формулируется при изучении письменного вычитания трехзначных чисел. Этому правилу и записи вычитания «столбиком» предшествует объяснение конкретного случая:

$$485-231=(400+80+5)-(200+30+1)=(400-200)+(80-30)+(5-1)=200+50+4=254.$$

Обоснуем каждый шаг выполняемых преобразований.

Сначала числа 485 и 231 представляются в виде сумм разрядных слагаемых (т. е. используется представление числа в десятичной системе счисления). Затем из сотен первого числа вычитаются сотни второго, из десятков — десятки, из единиц — единицы, что возможно на основании правил вычитания из числа суммы и числа из суммы. Действительно:

а) на основании правила вычитания из числа суммы:

$$(400+80+5)-200-3-1;$$

б) на основании правила вычитания числа из суммы:

$$(400-200)+(80-30)+(5-1).$$

Разности в скобках находятся с опорой на таблицу сложения однозначных чисел.

Выражение $200+50+4$ есть сумма разрядных слагаемых, поэтому его можно записать в виде 254.

Таким образом, вычитание из числа 485 числа 231 свелось к поразрядному вычитанию единиц, десятков и сотен, что удобно делать, записав данные числа «столбиком»:

$$\begin{array}{r} 485 \\ -\ 231 \\ \hline 254 \end{array}$$

Упражнения

1. На примере вычитания чисел 875 и 528 покажите, какие теоретические факты лежат в основе агоритма вычитания многозначных чисел.

2. При изучении алгоритма вычитания трехзначных чисел в начальной школе последовательно рассматриваются случаи вычитания: $563-321$, $540-236$, $875-528$, $826-351$, $725-256$. Каковы особенности вычитания в каждом из этих случаев?

3. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются вычитанием, и решите их:

1) Из двух городов, находящихся один от другого на расстоянии 986 км, вышли навстречу друг другу два поезда. Один из них прошел до встречи 425 км. Сколько километров прошел до встречи второй поезд?

2) С первого участка получили 380 т пшеницы, со второго на 127 т меньше, чем с первого. Сколько тонн пшеницы получили со второго участка?

4. Вычислите устно значение выражения, использованный прием обоснуйте:

1) $7549-(1020+2549)$;
2) $(9547+2395)-7547$;
3) $(3949+5027+4843)-(2027+3843)$.

5. Найдите наиболее рациональный способ вычисления:

1) $8034+472-(34+472)$;
2) $1743-295+(257+295)$.

6. Сравните выражения:

1) $6387-1486-821$ и $6387-(1486+821)$;
2) $5247-(4524-2805)$ и $5247-4524-2805$.

7. Решение задачи запишите в виде числового выражения, а затем найдите его значение:

1) В цветочный магазин привезли 465 кустов цветочной рассады. Утром продали 43 кустика, а днем 122 кустика. Сколько кустиков рассады осталось продать?

2) Почтальон разнес утром 350 писем, днем на 35 писем меньше, а вечером на 112 писем меньше, чем днем. Сколько писем почтальон разнес вечером?

3) На элеватор доставили в первый день 897 т пшеницы, во второй день на 135 т больше, чем в первый, а в третий день на 76 т меньше, чем во второй день. Сколько тонн пшеницы доставили на элеватор в третий день?

4) С одного поля собрали 9000 кг картофеля, с другого — на 1320 кг меньше. Когда с каждого поля часть картофеля увезли, на первом поле осталось 2360 кг, на втором 2100 кг. С какого поля увезли картофеля больше и на сколько?

5) Из двух городов, растояние между которыми 846 км, вышли навстречу друг другу два поезда. Какое расстояние будет между поездами, когда один пройдет 324 км, а другой 286 км?

8. Решите арифметическим способом задачи:

1) В первой библиотеке 6844 книги, что на 959 книг меньше, чем во второй, а в третьей на 2348 книг меньше, чем в первой и второй библиотеках вместе. Сколько книг в трех библиотеках?

2) На одном заводе 7216 рабочих — это на 1867 человек больше, чем на втором, а на третьем на 874 человека больше, чем на первом и втором заводах вместе. Сколько рабочих на трех заводах?

70. Умножение многозначных чисел в десятичной системе счисления

Если числа a и b однозначные, то, чтобы найти их произведение, достаточно сосчитать число элементов в декартовом произведении таких множеств A и B, что $n(A)=a$, $n(B)=b$. Но чтобы всякий раз, выполняя умножение таких чисел, не обращаться к множествам и счету, все произведения, которые получаются при умножении двух однозначных чисел, запоминают.

Все такие произведения записывают в особую таблицу, которая называется таблицей умножения однозначных чисел.

Если числа a и b многозначные, то, как известно, их умножают «столбиком». Выясним, каковы теоретические основы этого умножения.

Умножим, например, число 426 на 123.

$$\begin{array}{r} 426 \\ \times\ 123 \\ \hline 1278 \\ +852 \\ \hline 426 \\ \hline 52398 \end{array}$$

Видим, что для получения результата нам пришлось число 426 умножить на 3, 2, 1, т. е. умножать многозначное число на однозначное; но, умножив на 2, мы результат записали по-особому, поместив единицы числа 852 под десятками числа 1278,— это потому, что мы, по сути дела, умножали на 2 десятка; третье слагаемое 426 — это результат умножения на 1 сотню. Кроме того, нам пришлось найти сумму многозначных чисел.

Итак, чтобы выполнять умножение многозначного числа на многозначное, необходимо уметь:

умножать многозначное число на однозначное;

умножать многозначное число на степень 10;

складывать многозначные числа.

Поскольку сложение многозначных чисел нами изучено, выясним, каковы теоретические основы умножения многозначного числа на однозначное и на степень десяти.

Рассмотрим процесс умножения числа 426 на 3. Согласно правилу записи чисел в десятичной системе счисления число 426 можно представить в виде.

$$4\cdot10^2+2\cdot10+6, \text{ и тогда } 426\cdot3=(4\cdot10^2+2\cdot10+6)\cdot3.$$

На основании распределительного закона умножения относительно сложения преобразуем последнюю запись, раскрыв скобки:

$$(4\cdot10^2)\cdot3+(2\cdot10)\cdot3+6\cdot3.$$

Переместительный и сочетательный законы умножения позволяют слагаемые в этой сумме записать так: $(4\cdot3)\cdot10^2+(2\cdot3)\cdot10+(6\cdot3)$.

Произведения в скобках могут быть найдены по таблице умножения однозначных чисел: $12\cdot10^2+6\cdot10+18$.

Видим, что умножение многозначного числа на однозначное свелось к умножению однозначных чисел.

Но полученное выражение не является десятичной записью числа — коэффициенты перед степенями 10 должны быть меньше 10. Поэтому представим 12 в виде $10+2$, а число 18 в виде $10+8$:

$$(10+2)\cdot10^2+6\cdot10+(10+8).$$

Раскроем скобки: $10^3+2\cdot10^2+6\cdot10+10+8$.

Воспользуемся сочетательным законом сложения и распределительным законом умножения относительно сложения: $1\cdot10^3+2\cdot10^2+(6+1)\cdot10+8$. Сумма $6+1$ есть сумма однозначных чисел и легко находится по таблице сложения: $1\cdot10^3+2\cdot10^2+7\cdot10+8$.

Полученное выражение есть десятичная запись числа 1278. Таким образом, $426\cdot3=1278$.

Вообще агоритм умножения числа $x=a_na_{n-1}\ldots a_1a_0$ на однозначное число y можно сформулировать так:

1. Записываем второе число под первым.

2. Умножаем цифры разряда единиц на число y. Если произведение меньше 10, его записываем в разряд единиц ответа и переходим к следующему разряду (десятков).

3. Если произведение цифры единиц на число y больше или равно 10, то представляем его в виде $10\cdot q_1+c_0$, где c_0 — однозначное число; записываем c_0 в разряд единиц ответа и запоминаем q_1 — перенос в следующий разряд.

4. Умножаем цифру разряда десятков на число y, прибавляем к полученному произведению число q_1 и повторяем процесс, описанный в п. 2 и 3.

5. Процесс умножения заканчивается, когда окажется умноженной цифра старшего разряда.

Как известно, умножение числа x на число вида 10^k сводится к приписыванию к десятичной записи данного числа k нулей. Действительно, если $x=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot10+a_0$, то $x\cdot10^k=(a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot10+a_0)\cdot10^k$. Применив распределительный закон умножения относительно сложения и другие законы умножения, получаем:

$$a_n\cdot10^{n+k}+a_{n-1}\cdot10^{n+k-1}+\ldots+a_1\cdot10^{k+1}+a_0\cdot10^k.$$

Это выражение является десятичной записью числа

$$a_na_{n-1}\ldots a_1a_0\underbrace{0\ldots0}_{k\text{ нулей}},$$

так как $a_n\cdot10^{n+k}+a_{n-1}\cdot10^{n+k-1}+\ldots+a_0\cdot10^k=a_n\cdot10^{n+k}+a_{n-1}\times\times10^{n+k-1}+\ldots+a_0\cdot10^k+0\cdot10^{k-1}+\ldots+0$.

Например, $534\cdot10^3=(5\cdot10^2+3\cdot10+4)\cdot10^3=5\cdot10^5+3\cdot10^4+4\times\times10^3=534\,000$.

Рассмотрим теперь алгоритм умножения многозначного числа на многозначное. Обратимся к примеру, с которого начинали, т. е. к произведению $426\cdot123$. Представим число 123 в виде суммы степеней десяти с коэффициентами: $123=1\cdot10^2+2\cdot10+3$ — и запишем произведение $426\cdot(1\cdot10^2+2\cdot10+3)$. Оно согласно распределительном закону умножения относительно сложения равно $426\cdot(1\cdot10^2)+426\cdot(2\cdot10)+426\cdot3$. Откуда на основании сочетательного закона умножения получаем:

$$(426\cdot1)\cdot10^2+(426\cdot2)\cdot10+426\cdot3.$$

Таким образом, умножение многозначного числа на многозначное свелось к умножению многозначного числа на однозначное.

Вообще алгоритм умножения числа $x=a_na_{n-1}\ldots a_1a_0$ на число $y=b_kb_{k-1}\ldots b_1b_0$ можно сформулировать так:

1. Записываем множитель x и под ним второй множитель y.

2. Умножаем число x на младший разряд b_0 числа y и записываем произведение xb_0 под числом y.

3. Умножаем число x на следующий разряд b_1 числа y и записываем произведение xb_1, но со сдвигом на один разряд влево, что соответствует умножению xb_1 на 10.

4. Продолжаем процесс вычисления произведений до вычисления xb_k.

5. Полученные $k+1$ произведение складываем.

В начальном курсе математики обучение умножению состоит из нескольких этапов, включающих таблицу умножения однозначных чисел; умножение двузначных чисел, оканчивающихся нулем; умножение многозначных чисел на однозначное, двузначное и трехзначное число.

Изучение алгоритма умножения «столбиком» начинается с умножения трехзначного числа на однозначное. Ему предшествует объяснение:

$$426 \cdot 3 = (400 + 20 + 6) \cdot 3 = 400 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = \\ = 1200 + 60 + 18 = 1278.$$

Оно говорит о том, что умножение трехзначных чисел на однозначные основывается на:

записи числа в десятичной системе счисления (в школе это связывается с представлением числа в виде суммы разрядных слагаемых);

распределительном законе умножения относительно сложения (в школьной терминологии — правила умножения суммы на число);

умножении круглых чисел на однозначное, т. е. таблице умножения однозначных чисел;

сложении многозначных чисел.

Затем на конкретных примерах показывается, что умножение многозначного числа на многозначное сводится к умножению многозначного числа на однозначное и сложению многозначных чисел. Например, $46 \cdot 38 = 46 \cdot (30 + 8) = 46 \cdot 30 + 46 \cdot 8$.

Упражнения

1. На примере умножения чисел 397 и 6 покажите, какие теоретические факты лежат в основе алгоритма умножения трехзначного числа на однозначное.

2. Произведение $96 \cdot 77$ можно преобразовать так: $96 \cdot 77 = 96 \cdot (70 + 7) = 96 \cdot 70 + 96 \cdot 7$. Как найти $96 \cdot 7$ и $96 \cdot 70$?

3. Покажите, что умножение 524 на 168 сводится к умножению многозначного числа на однозначное и сложению многозначных чисел, а затем найдите произведение этих чисел «столбиком».

4. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются при помощи действия умножения, и решите их:

1) При обращении Земли вокруг Солнца Земля за сутки проходит примерно 2 505 624 км. Какой путь Земля проходит за 365 дней?

2) Диаметр Земли равен приближенно 12 740 км. Луна находится от Земли на расстоянии в 30 раз больше, чем диаметр Земли. Каково расстояние от Земли до Луны?

5. Решение задачи запишите в виде числового выражения, а затем найдите его значение:

1) Швейная фабрика за первые 6 дней изготовляла по 485 платьев. Сколько всего платьев изготовила фабрика за эти дни?

2) На элеватор отвезли 472 т овса, ржи на 236 т больше, чем овса, а пшеницы в 4 раза больше, чем овса и ржи вместе. Сколько тонн пшеницы отвезли на элеватор?

3) На одном участке посеяли 30 т пшеницы, а на другом — на 3 т больше. С первого участка собрали в 21 раз больше, чем посеяли, а со второго — в 24 раза больше, чем посеяли. Сколько пшеницы собрали с двух участков?

4) На колхозной ферме 326 коров и 118 телят. Колхоз заготовил для них силос из расчета 5 т 40 кг на корову и 2 т 80 кг на теленка. Сколько всего силоса заготовил колхоз для коров и телят?

6. Вычислите рациональным способом значение выражения:

1) $(420 - 394) \cdot 405 - 25 \cdot 405 \cdot 300$;

2) $105 \cdot 209 - (963 - 859) \cdot 209 \cdot 400$;

3) $1987 \cdot 19\,861\,986 - 1986 \cdot 19\,871\,987$.

7. Найдите значения произведений $13 \cdot 11$, $27 \cdot 11$, $35 \cdot 11$, $43 \cdot 11$, $54 \cdot 11$ и обоснуйте правило: чтобы умножить двузначное число (сумма цифр которого меньше 10) на 11, достаточно между цифрами числа написать сумму его цифр.

8. Вычислите $29 \cdot 11$, $37 \cdot 11$, $47 \cdot 11$, $85 \cdot 11$, $97 \cdot 11$ и обоснуйте правило: чтобы умножить двузначное число (сумма цифр которого равна или больше 10) на 11, достаточно между цифрой десятков, увеличенной на 1, и цифрой единиц написать разность между суммой его цифр и числом 10.

71. Деление многозначных чисел в десятичной системе счисления

Когда речь идет о технике деления чисел, то этот процесс рассматривают как действие деления с остатком. Вспомним определение: разделить с остатком целое неотрицательное число a на натуральное число b — это значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что $a = bq + r$, причем $0 \leqslant r < b$, а число q называют неполным частным.

При делении однозначных чисел и двузначных (не превышающих 89) на однозначное используется таблица умножения однозначных чисел.

Пусть, например, надо разделить 54 на 9. Ищем в 9-м столбце (9-й строке) число 54. Оно находится в 6-й строке (6-м столбце). Значит, $54 : 9 = 6$.

Разделим теперь 51 на 9. В 9-м столбце нет числа 51. Поэтому возьмем в этом столбце ближайшее к нему меньшее число 45. Так как 45 находится в 5-й строке, то неполное частное равно 5. Чтобы найти остаток, вычтем из 51 число 45: $51 - 45 = 6$. Таким образом, $51 = 9 \cdot 5 + 6$, или в школьной символике $51 : 9 = 5$ (ост. 6).

Выясним теперь, как осуществляется деление многозначного числа на однозначное. Пусть требуется разделить 238 на 4. Это значит надо найти такие неполное частное q и остаток r, что $238=4q+r$, $0\leqslant r<4$.

Заметим, что требование к неполному частному q чисел 238 и 4 можно записать в таком виде: $4q\leqslant 238<4(q+1)$.

Выясним сначала, сколько цифр будет содержаться в записи числа q. Однозначным число q быть не может, так как произведение числа 4 на однозначное число плюс остаток не равно 238. Если число q двузначное, т. е. если $10<q<100$, то тогда число 238 заключено между числами 40 и 400, что верно. Значит, частное чисел 238 и 4 — число двузначное.

Чтобы найти цифру десятков частного, умножим последовательно делимое 4 на 20, 30, 40 и т. д. Поскольку $4\cdot 50=200$, $4\cdot 60=240$ и $200<238<240$, то неполное частное заключено между числами 50 и 60, т. е. $q=50+q_0$. Но тогда о числе 238 можно сказать, что $4\cdot(50+q_0)\leqslant 238<4\cdot(50+q_0+1)$, откуда

$$200+4q_0\leqslant 238<200+4(q_0+1) \text{ и } 4q_0\leqslant 238<4(q_0+1).$$

Число q_0 (цифру единиц частного), удовлетворяющее данному неравенству, можно найти, воспользовавшись таблицей умножения. Получаем, что $q_0=9$, и, следовательно, неполное частное $q=50+9=59$. Остаток находится вычитанием: $238-4\cdot 59=2$.

Итак, при делении числа 238 на 4 получается неполное частное 59 и остаток 2: $238=4\cdot 59+2$.

Описанный процесс деления лежит в основе так называемого деления уголком:

$$\begin{array}{r|l} 238 & 4 \\ \hline -\,20 & 59 \\ \hline \;\;38 & \\ -\,36 & \\ \hline \;\;\;2 & \end{array}$$

Аналогично выполняется деление многозначного числа на многозначное. Разделим, например, 5658 на 46. Выполнить это деление — значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что $5658=46q+r$, $0\leqslant r<46$. Отсюда имеем, что $46\cdot q\leqslant 5658<46(q+1)$.

Установим число цифр в частном q. Очевидно, частное q заключено между числами 100 и 1000 (т. е. оно трехзначное), так как

$$4600<5658<46\,000.$$

Чтобы найти цифру сотен частного, умножим последовательно делимое 46 на 100, 200, 300 и т. д. Поскольку $46\cdot 100=4600$, а $46\cdot 200=9200$ и $4600<5658<9200$, то неполное частное заключено между числами 100 и 200, т. е. $q=100+q_1$, где q_1 — двузначное число. Но тогда будут справедливы неравенства

$$46\cdot(100+q_1)\leqslant 5658<46\cdot(100+q_1+1).$$

Раскрыв скобки и вычтя число 4600, придем к неравенству

$$46q_1\leqslant 1058<46\cdot(q_1+1).$$

Число q_1 двузначное. Потому, чтобы найти цифру десятков частного, умножим последовательно делимое 46 на 10, 20, 30 и т. д. Так как $46\cdot 20=920$, а $46\cdot 30=1380$ и $920<1058<1380$, то $20<q_1<30$ и число q_1 можно представить в виде $q_1=20+q_0$. Но тогда о числе 1058 можно сказать, что

$$46\cdot(20+q_0)\leqslant 1058<46\cdot(20+q_0+1), \text{ т. е.}$$
$$46\cdot 20+46\cdot q_0\leqslant 1058<46\cdot 20+46\cdot(q_0+1),$$
$$46q_0\leqslant 138<46\cdot(q_0+1).$$

Число q_0 (цифру единиц частного), удовлетворяющее последнему неравенству, находим перебором, последовательно умножая 46 на 1, 2, 3, ..., 9. Получаем, что $46\cdot 3=138$, т. е. имеем случай, когда остаток равен нулю. Значит, $5658:46=123$.

Приведенные выше рассуждения лежат в основе деления уголком:

$$\begin{array}{r|l} 5658 & 46 \\ \hline -\,46 & 123 \\ \hline \;\;105 & \\ -\;\;92 & \\ \hline \;\;138 & \\ -\;138 & \\ \hline \;\;\;0 & \end{array}$$

Для полноты представления о делении многозначных чисел рассмотрим тот случай, когда в частном появляются нули. Разделим, например, 7549 на 37, т. е. найдем такие числа q и r, что $7549=37\cdot q+r$, $0\leqslant r<37$ и $37q\leqslant 7549<37(q+1)$.

Частное q чисел 7549 и 37 заключено между числами 100 и 1000 (т. е. оно трехзначное), поскольку $3300<7549<37\,000$.

Умножением числа 37 на 100, 200 и т. д. устанавливаем, что $37\cdot 200\leqslant 7549<37\cdot 300$. Значит, $q=200+q_1$, где q_1 — двузначное число и $37\cdot(200+q_1)\leqslant 7549<37\cdot(200+q_1+1)$.

После преобразований приходим к неравенству

$$37q_1\leqslant 149<37\cdot(q_1+1).$$

Так как число q_1 двузначное, то цифру десятков в его записи находят, умножая 37 на 10, 20, 30 и т. д. Но в нашем случае оказывается, что ни одно из этих чисел неравенству не удовлетворяет. Это значит, что цифра десятков в числе q_1 равна 0, т. е. $q_1=0+q_0$. Неполное частное q имеет вид:

$$q=200+0+q_0, \text{ где } q_0 \text{ — число единиц и } q_0=q_1.$$

Из последнего неравенства находим, что $q_1=4$. Значит, искомое частное есть число $200+0+4=204$, а остаток равен 1, так как $7549-37\cdot 204=1$.

Приведенные вычисления записывают в виде деления уголком:

$$\begin{array}{r|l} 7549 & 37 \\ \underline{-74} & \overline{204} \\ 149 & \\ \underline{-148} & \\ 1 & \end{array}$$

Обобщением различных случаев деления целого неотрицательного числа a на натуральное число b является следующий алгоритм деления уголком.

I. Если $a=b$, то частное $q=1$, остаток $r=0$.

II. Если $a>b$ и число разрядов в числах a и b одинаково, то частное находим перебором, последовательно умножая b на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, так как $a<10b$.

III. Если $a>b$ и число разрядов в числе a больше, чем в числе b, то записываем делимое a и справа от него делитель b, который отделяем от a уголком, и ведем поиск частного и остатка в такой последовательности:

1) Выделяем в числе a столько старших разрядов, сколько разрядов в числе b, или, если необходимо, на один разряд больше, но так, чтобы они образовали число d_1, большее или равное b. Перебором находим частное q_1 чисел d_1 и b, последовательно умножая b на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Записываем q_1 под уголком (ниже b).

2) Умножаем b на q_1 и записываем произведение под числом a так, чтобы младший разряд числа bq_1 был записан под младшим разрядом выделенного числа d_1.

3) Проводим черту под b_1 и находим разность

$$r_1=d_1-bq_1.$$

4) Записываем разность r_1 под числом bq_1, приписываем справа к r_1 старший разряд из неиспользованных разрядов делимого a и сравниваем полученное число d_2 с числом b.

5) Если полученное число d_2 больше или равно b, то относительно его поступаем согласно п. I или II. Частное q_2 записываем после q_1.

6) Если полученное число d_2 меньше b, то приписываем еще столько следующих разрядов, сколько необходимо, чтобы получилось первое число d_3, большее или равное b. В этом случае записываем после q_1 такое же количество нулей. Затем относительно d_3 поступаем согласно п. I или II. Частное q_2 записываем после нулей. Если при использовании младшего разряда числа a окажется, что $d_3<b$, то тогда частное чисел d_3 и b равно нулю, и этот нуль записываем последним разрядом к частному, а остаток $r=d_3$.

Так как выполнение деления связано со многими математическими умениями, и в частности умением умножать и вычитать многозначные числа, овладение ими в начальных классах идет постепенно. Сначала учащиеся осваивают табличное деление и деление

чисел, оканчивающихся нулем, затем деление двузначного числа на однозначное и двузначное (с опорой на правила деления суммы на число и таблицу умножения), далее рассматривают деление с остатком и, наконец, переходят к делению многозначного числа на однозначное, двузначное и трехзначное.

Упражнения

1. На примере деления числа 867 на 3 покажите, какие теоретические факты лежат в основе алгоритма деления трехзначного числа на однозначное.

2. Не выполняя деления, определите число цифр частного чисел:
1) 368 и 7; 2) 4368 и 39; 3) 83 622 и 27 874; 4) 2184 и 318.

3. Обоснуйте процесс деления a на b, если:
1) $a=1899$, $b=6$; 2) $a=432$, $b=4$; 3) $a=1242$, $b=54$; 4) $a=1254$, $b=38$.

4. Как, не вычисляя, можно установить, что деление в следующих примерах выполнено неправильно:
1) $51\,054:127=42$; 2) $405\,945:135=307$?

5. Выполните деление уголком:
1) $11\,455:145$; 2) $261\,960:740$; 3) $105\,754:253$;
4) $213\,664:352$.

6. Заполните пропуски:
1) $1986:1986=$_____, так как _____;
2) $1986:1=$_____, так как _____;
3) $0:1986=$_____, так как _____;
4) частное 1986 и 0 _____, так как _____.

7. Объясните, почему данные задачи решаются при помощи действия деления, и решите их:
1) 2600 лимонов разложили по сотне в каждую корзину. Сколько потребовалось корзин?
2) Наша страна протянулась с запада на восток на расстояние около 10 000 км. Сколько времени потребовалось бы, чтобы проехать это расстояние на поезде со скоростью 50 км/ч? чтобы пролететь на самолете со скоростью 1000 км/ч?

8. Найдите значение выражения:
1) $8919:9+114\,240:21$;
2) $1190-35\,360:34+271$;
3) $8631-(99-44\,352:63)$;
4) $48\,600\cdot(5045-2040):243-(86\,043:43+504)\cdot200$;
5) $4880\cdot(546+534):122-6390\cdot(8004-6924)\cdot213$.

9. Решение задачи запишите в виде числового выражения, а затем найдите его значение:
1) В швейной мастерской сшили из 320 м ткани платья и из 120 м ткани рубашки. На каждое платье шло 4 м, на каждую рубашку 3 м. Чего сшили больше: платьев или рубашек — и во сколько раз больше?

2) Пионеры совершили экскурсию по реке на катере, проплыв всего 66 км. 2 ч они плыли со скоростью 18 км/ч, а остальной путь — со скоростью 15 км/ч. Сколько всего времени находились в пути пионеры?

3) 7600 машин, направленных из города на уборку урожая в колхозы и совхозы, разделили на автоколонны: 3000 машин по 125 в колонне, а остальные — по 200 в колонне. Сколько всего автоколонн направлено в колхозы и совхозы?

10. Найдите значение первого выражения, а затем используйте его при вычислении значения второго:

1) 45 120 : (376 · 12), 45 120 : (376 · 3);
2) 241 · (1264 : 8), 241 · (1264 : 4).

11. Найдите двумя способами значение выражения:

1) (297 + 405 + 567) : 27;
2) (240 · 23) : 48;
3) 56 · (378 : 14);
4) 15 120 : (14 · 5 · 18).

72. Запись чисел в позиционных системах счисления, отличных от десятичной

В предыдущих пунктах мы изучали особенности системы счисления, основанием которой является число 10. Вы помните, что любое число в этой системе записывается в виде многочлена $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$, где коэффициенты a_n, a_{n-1}, ..., a_0 принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и $a_n \neq 0$.

Десятичная система счисления позиционная — значение одного и того же знака (цифры) зависит от места (позиции), которое этот знак занимает в записи числа.

Как известно, в истории человечества существовали и другие позиционные системы счисления. И различия между ними состоят не только в том, что в этих системах использовались различные символы для обозначения чисел, но и в том, что эти системы имели разные основания. Например, вавилонская система счисления была шестидесятеричной. Известны и другие позиционные системы счисления: двенадцатеричная, которую мы используем в настоящее время, ведя счет предметов дюжинами и разделяя сутки на 2 половины, по 12 часов каждая, а год на 12 месяцев; двадцатеричная, которой пользовались индейцы племени майя.

Вообще, основанием позиционной системы счисления может быть любое натуральное число p, большее или равное 2. Если $p = 2$, то система называется двоичной, если $p = 3$ — троичной, если $p = 8$ — восьмеричной, если $p = 10$ — десятичной (иногда говорят десятеричной по аналогии с другими системами) и т. д.

Как записать число в системе с основанием p?

В десятичной системе для записи чисел используется 10 знаков (символов): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Очевидно, в двоичной системе это можно сделать с помощью двух знаков, например 0, 1; в троичной надо 3 знака, ими могут быть 0, 1 и 2; в восьмеричной — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Вообще для записи чисел в системе

счисления с основанием p необходимо p символов: 0, 1, 2, ..., $p-1$.

Заметим, что для записи чисел в системе счисления с основанием p мы предлагаем те же символы, которые используются в десятичной системе счисления, хотя можно использовать и другие знаки — важно, чтобы их количество равнялось p.

Определение. **Записью натурального числа x в системе счисления с основанием p называется его представление в виде $x = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot p + a_0$, где a_n, a_{n-1}, ..., a_0 принимают значения 0, 1, 2, 3, ..., $p-1$ и $a_n \neq 0$.**

Тот факт, что любое натуральное число x можно записать в таком виде единственным образом, мы примем без доказательства.

Вместо представления числа x в виде $x = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot p + a_0$ принято писать короче: $x = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$.

Например, в троичной системе, т. е. при $p = 3$, сумма $2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 1$ представляет собой запись некоторого числа x, которое можно записать короче: $x = 2101_3$.

Заметим, что данное число следует читать так: «Два, один, нуль, один в троичной системе счисления».

Наиболее экономной в плане использования различных знаков для записи чисел является двоичная система счисления — в ней для этих целей нужно всего два знака 0 и 1. В этой системе краткая запись числа представляет собой конечную последовательность из нулей и единиц. Например: $1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 10 + 1$, $10001_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$.

С помощью этих двух цифр, используемых при записи любого числа в двоичной системе счисления, можно охарактеризовать два устойчивых состояния радиоэлектронных элементов. Например, электронная лампа может пропускать ток или не пропускать. Это свойство радиоэлектронных элементов и является причиной того, что именно двоичная система счисления оказалась наиболее удобной для вычислительных машин. Другой причиной использования этой системы, как мы скоро увидим, является простота выполнения на машине арифметических действий над числами, записанными в двоичной системе.

Сравнение чисел, записанных в системе счисления с основанием p ($p \neq 10$), выполняется так же, как и в десятичной системе. Так, $2101_3 < 2102_3$, поскольку при одинаковом количестве разрядов и совпадении трех цифр старших разрядов цифра младшего разряда первого числа меньше цифры такого же разряда второго числа.

В связи с использованием ЭВМ, выполняющих вычисления в двоичной и других системах, возникает задача перехода от записи числа в десятичной системе к записи в другой и наоборот: ведь математик, использующий ЭВМ для решения той или иной задачи, ведет вычисления в десятичной системе счисления.

I. Переход от записи числа в системе с основанием p к записи в десятичной системе. Пусть число x записано в системе счисления с основанием p: $x = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$. Его можно записать в виде многочлена $a_n \cdot p^n +$

$+a_{n-1}\cdot p^{n-1}+\ldots+a_1\cdot p+a_0$, где числа a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 и p представлены десятичными записями. Выполнив действия над этими числами по правилам, принятым в десятичной системе, получим десятичную запись числа x. Например, чтобы найти десятичную запись числа 346_8, представим его в виде суммы $3\cdot8^2+4\cdot8+6$ и найдем ее значение: $3\cdot8^2+4\cdot8+6=226$. Следовательно, $346_8=226_{10}$.

2. Переход от записи числа в десятичной системе к записи в системе с основанием p. Пусть число x записано в десятичной системе. Представить его в системе с основанием p — это значит найти такие значения a_n, a_{n-1}, ..., a_0, что $x=a_n\cdot p^n+a_{n-1}\cdot p^{n-1}+\ldots+a_1\cdot p+a_0$, причем $1\leqslant a_n<p$, $0\leqslant a_{n-1}<p$, ..., $0\leqslant a_0<p$.

Обратим внимание на одну закономерность. Число $x=a_n\cdot p^n+a_{n-1}\cdot p^{n-1}+\ldots+a_1\cdot p+a_0$ можно записать в виде $x=p\cdot(a_n\cdot p^{n-1}+a_{n-1}\cdot p^{n-2}+\ldots+a_1)+a_0$. Так как $0\leqslant a_0<p$, то последнее представление числа x можно рассматривать как запись деления с остатком числа x на p, где a_0 — остаток, $a_n\cdot p^{n-1}+a_{n-1}\cdot p^{n-2}+\ldots+a_1$ — неполное частное. Точно так же можно найти, что a_1 — это остаток, который получается при делении полученного частного на p, и т. д.

Эта закономерность и лежит в основе процесса перехода от десятичной записи числа к записи в системе с основанием p.

Делим с остатком число x на p по правилам деления в десятичной системе. Остаток, который получается при делении, есть последняя цифра в записи числа x в системе с основанием p.

Полученное частное снова делим с остатком на p. Новый остаток есть предпоследняя цифра в записи числа x в системе с основанием p. Продолжая процесс деления, найдем все цифры в записи числа x в системе с основанием p.

Найдем, например, запись числа 89 в троичной системе счисления, т. е. представим число 89 в виде $a_n\cdot3^n+a_{n-1}\cdot3^{n-1}+\ldots+a_1\cdot3+a_0$, где a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 принимают значения 0, 1, 2.

Разделим 89 на 3: $89=29\cdot3+2$. В результате деления найдено, что $a_0=2$, но коэффициент перед числом 3 больше 2, поэтому делим 29 на 3: $29=9\cdot3+2$, т. е. $89=(9\cdot3+2)\cdot3+2=9\cdot3^2+2\cdot3+2$. При этом делении мы нашли, что $a_1=2$, но коэффициент при степени 3^2 больше 2, и поэтому делим 9 на 3: $9=3\cdot3+0$, т. е.

$$89=(3\cdot3+0)\cdot3^2+2\cdot3+2=3\cdot3^3+0\cdot3^2+2\cdot3+2.$$

На этом этапе мы установили, что $a_2=0$, но коэффициент при степени 3^3 больше 2, поэтому делим 3 на 3: $3=1\cdot3+0$, т. е. $89=(1\cdot3+0)\cdot3^3+0\cdot3^2+2\cdot3+2=1\cdot3^4+0\cdot3^3+0\cdot3^2+2\cdot3+2$. Выполняя последнее деление, мы не только нашли $a_3=0$, но и установили цифру старшего разряда $a_4=1$. Поэтому процесс деления окончен. Многочлен $1\cdot3^4+0\cdot3^3+0\cdot3^2+2\cdot3+2$ есть запись числа 10022_3. Значит, $89_{10}=10022_3$.

Описанный процесс можно вести, выполняя деление уголком:

$$\begin{array}{r|l} 89 & 3 \\ \hline -6 & 29 \\ \hline 29 & \\ -27 & 3 \\ \hline 2 & \end{array}\qquad\begin{array}{r|l} 29 & 3 \\ \hline -27 & 9 \\ \hline 2 & \end{array}\qquad\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ \hline -9 & 3 \\ \hline 0 & \end{array}\qquad\begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ \hline -3 & 1 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$89_{10}=10\,022_3$

Записывая результат такого деления, надо помнить, что цифра старшего разряда — это последнее частное в цепочке последовательных делений.

В начальном курсе математики не рассматривают позиционные системы счисления, отличные от десятичной. Но учителю начальных классов знания об этих системах должны помочь лучше освоить особенности десятичной системы. Выполняя действия с числами в системе, отличной от десятичной, мы оказываемся в положении младшего школьника, овладевающего новой для него десятичной системой счисления.

Упражнения

1. Сколько и какие цифры можно использовать для записи чисел: 1) в пятеричной системе счисления; 2) в восьмеричной системе счисления?

2. Представьте число в виде суммы степеней основания с коэффициентами:

1) 1201_3; 2) 43020_5; 3) 70652_8.

3. Какие из следующих записей чисел могут быть записями чисел в восьмеричной системе счисления:

1) 734; 2) 1109; 3) 1101; 4) 36 927?

4. Установите, какие числа представлены следующими многочленами:

1) $2\cdot3^3+0\cdot3^2+1\cdot3+0$;
2) $4\cdot5^4+1\cdot5^3+2\cdot5^2+3\cdot5+2$;
3) $1\cdot8^5+4\cdot8^3+7\cdot8+6$;
4) $1\cdot2^6+0\cdot2^5+1\cdot2^3+1$.

5. Почему число 2101_3 нельзя прочитать так: «Две тысячи сто один»?

6. Запишите в десятичной системе счисления числа: 15_8, 247_8, 102_3, 110_2, 451_5.

7. Запишите в двоичной системе числа: 9, 29, 129, 2.

8. Запишите в троичной системе счисления числа: 16_8, 34_5, 12_3, 3.

9. Сравните числа:

1) 21012_3 и 21100_3; 2) 210_3 и 344_5; 3) 14_{10} и 1110_2.

10. Как запишется в системе счисления с основанием p ($p\neq10$) число p_{10}?

73. Действия над числами в позиционных системах счисления, отличных от десятичной

Действия над числами в системах счисления с основанием p ($p \neq 10$) выполняются по тем же правилам, что и в десятичной системе счисления. Прежде всего для сложения и умножения однозначных чисел составляются соответствующие таблицы. Они используются как при вычитании и делении однозначных чисел, так и при действиях с многозначными числами.

Составим, например, таблицу сложения однозначных чисел в троичной системе счисления. Однозначные числа в ней — это 0, 1, 2. Число 3 записывается 10_3. Число 4_{10} имеет вид 11_3, так как $4_{10} = 1 \cdot 3 + 1 = 11_3$. Аналогичным образом находим запись и других чисел в троичной системе. Таблицу сложения удобно представить в таком виде, где на пересечении строки и столбца стоит сумма.

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Используя эту таблицу, можно складывать любые числа в троичной системе счисления. Например, $1221_3 + 122_3 = 2121_3$, так как, выполняя сложение «столбиком», получаем:

$$\begin{array}{r} 1221 \\ +\ 122 \\ \hline 2120 \end{array}$$

Этой же таблицей можно пользоваться, выполняя вычитание чисел в троичной системе счисления:

$$\begin{array}{r} 2110 \\ -\ 212 \\ \hline 1121 \end{array}$$

Таблица умножения однозначных чисел в троичной системе имеет вид:

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

На основе этой таблицы и таблицы сложения выполняют умножение многозначных чисел. Найдем, например, произведение $122 \cdot 22$:

$$\begin{array}{r} 122 \\ \times\ 22 \\ \hline 1021 \\ +\ 1021 \\ \hline 12001 \end{array}$$

Отметим, что сложение полученных неполных произведений выполняется в троичной системе счисления.

Опираясь на эту таблицу, выполняют деление чисел, записанное в троичной системе счисления, например:

$$\begin{array}{r|l} 10011 & 12 \\ \hline -\ 12 & 122 \\ \hline 111 & \\ -\ 101 & \\ \hline 101 & \\ -\ 101 & \\ \hline \end{array} \qquad 10\,011 : 12 = 122$$

Упражнения

1. Выполните действия над числами в троичной системе счисления:

1) $2001 + 21\,220$; 3) $2102 \cdot 21$;
2) $1201 - 122$; 4) $120\,101 : 102$.

2. Составьте таблицы сложения и умножения однозначных чисел в пятеричной системе счисления и выполните в этой системе действия над числами:

1) $4203 + 2132$; 3) $213 \cdot 3$;
2) $2143 - 334$; 4) $42 \cdot 31$.

3. Найдите второе слагаемое:

1) $\begin{array}{r} 32103214_5 \\ +\ *2*0*24*_5 \\ \hline 13*0*3**1_5 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 10111*10*_2 \\ +\ **0*0*1**1_2 \\ \hline 100*1*00010_2 \end{array}$

4. Выполните действия, ответ запишите в троичной системе:

1) $755_8 + 340_5 - 10111_2$; 2) $24_5 \cdot 47_8 + 10101_2$.

5. При каком значении p верны равенства:

1) $21_p = 15_{10}$; 2) $203_p = 53_{10}$; 3) $1000_p = 27_{10}$; 4) $10_p = 12_{10}$?

6. Найдите значение p:

1) $306_p + 124_p = 220_{10}$; 2) $102_p + 212_p = 34_{10}$; 3) $752_p - 647_p = 67_{10}$.

§ 11. ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

74. Понятие отношения делимости

Как известно, вычитание и деление целых неотрицательных чисел выполняется не всегда. Например, не существует таких целых неотрицательных чисел, которые были бы разностью и частным чисел 3 и 7. Однако вопрос о существовании разности целых неотрицательных чисел a и b решается просто — достаточно установить (по записи чисел), что $a \geqslant b$. Для деления такого общего и простого признака нет. Поэтому математики с давних пор пытались найти такие правила, которые позволяли бы по записи числа a узнавать, делится оно на число b или нет, не выполняя непосредственного деления a на b. В результате этих поисков были открыты не только некоторые признаки делимости, но и другие важные свойства чисел,

Чтобы рассмотреть эти признаки делимости, необходимо уточнить понятие отношения делимости.

Определение. **Пусть даны целое неотрицательное число a и натуральное число b. Если при делении с остатком a на b остаток равен нулю, то число b называют делителем числа a.**

Из определения следует, что если b — делитель a, то существует такое целое неотрицательное число q, что $a=bq$.

Например, число 8 является делителем числа 32, так как существует такое целое неотрицательное число $q=4$, что $32=8\cdot4$.

Термин «делитель данного числа» следует отличать от термина «делитель», обозначающего то число, на которое делят. Например, если 18 делят на 5, то число 5 — делитель, но 5 не является делителем числа 18. Если 18 делят на 6, то в этом случае понятия «делитель» и «делитель данного числа» совпадают.

В том случае, когда число b является делителем числа a, говорят также, что a кратно b или a делится на b, и, используя символы, пишут: $a \vdots b$.

Запись $a \vdots b$ есть запись отношения делимости, она не означает действие, которое надо произвести над числами a и b, т. е. нельзя писать $a \vdots b=c$.

Так как делитель данного числа не превышает этого числа, то множество его делителей конечно. Назовем, например, все делители числа 36. Они образуют конечное множество {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}.

В зависимости от числа делителей среди натуральных чисел различают простые и составные числа.

Определение. **Простым числом называется такое натуральное число, которое имеет только два делителя — единицу и само это число.**

Например, число 17 простое, поскольку у него только два делителя: 1 и 17.

Определение. **Составным числом называется такое натуральное число, которое имеет более двух делителей.**

Так, число 4 составное, у него три делителя: 1, 2 и 4.

Число 1 не является ни простым, ни составным числом в связи с тем, что оно имеет всего один делитель.

Чисел, кратных данному числу, можно назвать как угодно много — их множество бесконечно. Так, числа, кратные 4, образуют бесконечный ряд: 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, ... Поскольку все числа этого ряда кратны 4, то они могут быть получены по формуле $x=4q$, где q принимает значения 0, 1, 2, 3, ...

Упражнения

1. Объясните, почему число 15 является: 1) делителем числа 60; 2) кратным числа 3.

2. Какие из чисел 2, 3, 5 являются делителями числа: 1) 230; 2) 225; 3) 450?

3. Какие из чисел 804, 75, 144, 150 кратны: 1) 2; 2) 3; 3) 5; 4) 9?

4. Назовите пять чисел, кратных 3. По какой формуле можно получить другие числа, кратные 3?

5. Запишите множество делителей чисел: а) 24; б) 38; в) 13; г) 1.

6. Докажите, что множество делителей любого натурального числа a есть конечное множество.

7. Множество целых неотрицательных чисел в зависимости от остатка при делении на 2 разбивается на 2 класса. Из каких чисел состоит каждый из этих классов? Напишите по два представителя каждого класса. По какой формуле можно получать четные числа? А по какой нечетные?

8. Объясните, почему число 19 является простым, а число 12 — составным.

9. При каких значениях q значения выражения $11q$ являются простыми числами?

10. Перечислите все простые делители числа 60.

11. Среди следующих высказываний укажите истинные: 1) Множество натуральных чисел разбивается на класс простых чисел и класс составных. 2) Множество натуральных чисел состоит из простых чисел, составных чисел и числа 1.

75. Свойства отношения делимости

Отношение делимости обладает рядом свойств: оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Докажем эти свойства. При этом и в дальнейшем будем считать известными определения и законы арифметических действий над целыми неотрицательными числами.

Теорема. ***Отношение делимости рефлексивно, т. е. любое натуральное число делится само на себя.***

Доказательство. Для любого натурального числа a справедливо равенство $a=a\cdot1$. Это значит, что существует такое $q=1$, что $a=a\cdot1$, откуда по определению отношения делимости $a \vdots a$.

Из доказанной теоремы вытекает, что любое целое неотрицательное число делится на 1.

Теорема. ***Отношение делимости антисимметрично, т. е. для различных чисел a и b из того, что $a \vdots b$, следует, что $b \vdots a$.***

Доказательство. Предположим, что $b \vdots a$. Но чтобы b делилось на a, необходимо, чтобы $b \geqslant a$. По условию $a \vdots b$, и, значит, $a \geqslant b$. Неравенства $b \geqslant a$ и $a \geqslant b$ истинны только в том случае, когда $a=b$. Пришли к противоречию с условием. Следовательно, наше предположение неверное, т. е. отношение делимости антисимметрично.

Теорема. ***Отношение делимости транзитивно, т. е. из того, что $a \vdots b$ и $b \vdots c$, следует, что $a \vdots c$.***

Доказательство. Так как $a \vdots b$, то существует такое целое неотрицательное число q, что $a=b\cdot q$. А так как $b \vdots c$, то существует такое целое неотрицательное число t, что $b=c\cdot t$. Подставим в первое равенство вместо b произведение $c\cdot t$. Получим $a=(c\cdot t)\cdot q$, откуда $a=(c\cdot t)\cdot q=c\cdot(t\cdot q)=c\cdot p$. Поскольку p — целое неотрица-

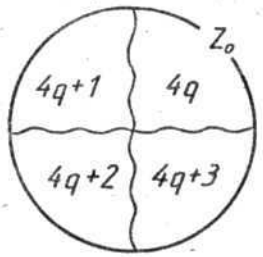


Рис. 120

тельное число, то равенство $a=c\cdot p$ означает, что $a \vdots c$. Теорема доказана.

Для дальнейшего изучения вопросов делимости и решения задач необходимо уточнить следующее.

Если, например, число делится на 4, то оно имеет вид $4q$, где q — целое неотрицательное число, а если число не делится на 4, то каков его вид?

Известно, что если число не делится на 4 нацело, то его можно разделить на 4 с остатком, причем остаток должен быть меньше 4, т. е. это число 1, 2 или 3. И тогда числа, которые при делении на 4 дают остаток 1, есть числа вида $4q+1$; числа, которые при делении на 4 дают остаток 2, есть числа вида $4q+2$, а числа, которые при делении на 4 дают остаток 3,— это числа вида $4q+3$.

Числа вида $4q$, $4q+1$, $4q+2$, $4q+3$ образуют множества, которые попарно не пересекаются и их объединение совпадает с множеством целых неотрицательных чисел (рис. 120).

Упражнения

1. Запишите, используя символы, свойства отношения делимости.

2. Постройте граф отношения «число x — делитель числа y» на множестве $X=\{12, 9, 6, 3, 18\}$. Каковы особенности этого графа? Чем от него будет отличаться граф отношения «x кратно y», если отношение задано на том же множестве?

3. Известно, что $a \vdots 6$ и $6 \vdots 2$. Какой вывод можно сделать о делимости числа a на 2?

4. Какие остатки могут быть получены при делении a на 3? Каков вид чисел, которые на 3 не делятся?

5. A — множество целых неотрицательных чисел вида $3q$, B — множество целых неотрицательных чисел вида $3q+1$, C — множество целых неотрицательных чисел вида $3q+2$. Можно ли утверждать, что $A \cup B \cup C = Z_0$?

6. Из множества целых неотрицательных чисел выделили подмножество чисел, кратных 7. Разбейте каким-либо образом на классы подмножество чисел, не кратных 7. Сколько классов разбиения множества Z_0 получилось?

76. Делимость суммы, разности и произведения целых неотрицательных чисел

Часто в практике возникает вопрос: как, не производя вычислений, определить, делится сумма (разность, произведение) на данное число или нет? Ответ на него предполагает знание следующих теорем.

Теорема о делимости суммы. ***Если каждое слагаемое делится на натуральное число n, то и их сумма делится на это число.***

Доказательство. Пусть числа a и b делятся на n. Докажем, что тогда число $a+b$ тоже делится на n. Так как $a \vdots n$, то существует такое целое неотрицательное число q, что $a=nq$. Так как $b \vdots n$, то существует такое целое неотрицательное число p, что $b=np$. Подставим в сумму $a+b$ вместо a произведение nq и вместо b произведение np. Получим $a+b=nq+np$. Вынесем за скобки общий множитель n и получившееся в скобках целое неотрицательное число $q+p$ обозначим буквой t. Получим $a+b=nq+np=n(q+p)=nt$. Нам удалось сумму $a+b$ представить в виде произведения числа n и некоторого целого неотрицательного числа t. А это значит, что число $a+b$ делится на n.

Мы провели доказательство теоремы для случая двух слагаемых. Аналогично можно доказать ее для суммы, состоящей из m слагаемых.

Пример. Не производя вычислений, можно сказать, что сумма $114+348+908$ делится на 2, так как на 2 делится каждое слагаемое этой суммы.

Теорема о делимости разности. ***Если числа a и b делятся на n и $a \geqslant b$, то $a-b$ делится на n.***

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы о делимости суммы.

Теорема о делимости произведения. ***Если один из множителей произведения делится на натуральное число n, то и все произведение делится на n.***

Доказательство. Его мы проведем для произведения, состоящего из двух целых неотрицательных множителей a и b. Пусть один из них, например a, делится на n. Так как $a \vdots n$, то существует такое целое неотрицательное число q, что $a=nq$. Умножим обе части этого равенства на b: $a\cdot b=(nq)\cdot b$, откуда $a\cdot b=n(q\cdot b)$, но $q\cdot b$ — целое неотрицательное число, следовательно, $ab \vdots n$.

Аналогично проводится доказательство и для произведения, в котором m множителей.

Например, произведение $24\cdot 976\cdot 305$ разделится на 12, так как на 12 делится множитель 24.

Рассмотрим еще две теоремы, связанные с делимостью произведения и суммы, которые часто используются в решении задач на делимость.

Теорема. ***Если в произведении ab множитель a делится на натуральное число m, а множитель b делится на натуральное число n, то произведение ab делится на произведение mn.***

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы о делимости произведения.

Например, произведение $24\cdot 36$ разделится на $108=12\cdot 9$, поскольку 24 делится на 12, а 36 делится на 9.

Теорема. ***Если в сумме одно слагаемое не делится на число m, а все остальные слагаемые делятся на число m, то вся сумма на число m не делится.***

Доказательство. Пусть $\underline{s=a_1+a_2+...+a_n+c}$ и известно, что $a_1 \vdots m$, $a_2 \vdots m$, ..., $\underline{a_n \vdots m}$, но $\underline{c \vdots m}$.

Докажем, что тогда $\underline{s \vdots m}$.

Предположим противное, т. е. пусть $s \vdots m$. Преобразуем сумму s к виду $c=s-(a_1+a_2+...+a_n)$. Так как $s \vdots m$ по предположению, $(a_1+a_2+...+a_n) \vdots m$ на основании теоремы о делимости суммы, то согласно теореме о делимости разности $\underline{s \vdots m}$. Пришли к противоречию с тем, что дано. Таким образом, $\underline{s \vdots m}$.

Например, сумма $34+125+376+1024$ на 2 не делится, так как $34 \vdots 2$, $376 \vdots 2$, $1024 \vdots 2$, но $\overline{125 \vdots 2}$.

Рассмотренные теоремы являются основой решения задач, связанных с делимостью чисел.

Задача. Доказать, что произведение любых двух последовательных натуральных чисел делится на 2.

Решение. Запишем условие задачи, используя символы. Если одно натуральное число обозначить буквой n, то число следующее за ним $n+1$. Значит, нам надо доказать, что $n(n+1) \vdots 2$ для любого натурального n.

Как известно, множество целых неотрицательных чисел можно разбить на 2 класса: четные числа (т. е. числа вида $2q$) и нечетные (т. е. числа вида $2q+1$).

Если $n=2q$, то $n(n+1)=2q(2q+1)$. Так как в произведении $2q(2q+1)$ есть множитель, который делится на 2, то и согласно теореме о делимости произведения все произведение делится на 2. Значит, $n(n+1) \vdots 2$.

Если $n=2q+1$, то $n(n+1)=(2q+1)(2q+2)$. Так как в полученном произведении есть множитель $2q+2$, который делится на 2 (каждое слагаемое суммы делится на 2), то и все произведение делится на 2. Значит, $n(n+1) \vdots 2$ и в этом случае.

Итак, утверждение $n(n+1) \vdots 2$ справедливо для всех четных и нечетных натуральных чисел, следовательно, оно справедливо для любого натурального числа.

Конечно, доказательство данного утверждения можно было бы провести проще, использовав тот факт, что из двух последовательных натуральных чисел одно обязательно четное, но приведенное доказательство ценно тем, что оно является иллюстрацией одного из способов доказательства утверждений о делимости чисел. Этот способ — полная индукция, при котором истинность утверждения выводится из истинности его во всех частных случаях.

Упражнения

1. В доказательстве теоремы о делимости суммы есть такое преобразование: $a+b=nq+np=n(q+p)$. Объясните: 1) на основании какого теоретического факта оказалось возможным вынести

число n за скобки; 2) почему сумма $q+p$ является целым неотрицательным числом.

2. Докажите теорему о делимости суммы для: 1) трех слагаемых; 2) m слагаемых.

3. Докажите теорему о делимости разности целых неотрицательных чисел на натуральное число.

4. Докажите, что: 1) если $a \vdots m$ и $b \vdots n$, то $ab \vdots mn$; 2) если $a \vdots m$ и $b \vdots m$, то $ab \vdots m^2$.

5. Известно, что a не кратно n и b не кратно n. Верно ли, что: 1) $a+b$ не кратно n; 2) $a \cdot b$ не кратно n?

6. Не выполняя сложения, установите, делится ли значение выражения на 3: 1) $180+144$; 2) $720+308$; 3) $103+370$.

7. Не производя вычитания, укажите выражения, значения которых делятся на 5: 1) $535-413$; 2) $1215-470$; 3) $20\,147-1307$.

8. Не производя вычислений, установите, будет произведение $75 \cdot 32 \cdot 27$ делиться на 5, 8, 9, 10, 18, 45.

9. Если к двузначному числу прибавить число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то сумма будет кратна 11. Докажите это.

10. Докажите или опровергните следующие высказывания: 1) Для того чтобы сумма двух натуральных чисел была четным числом, необходимо, чтобы каждое слагаемое было четным числом 2) Из того, что сумма двух натуральных чисел четна, следует, что оба слагаемые тоже четные. 3) Из того, что числа a и b нечетные, следует, что их сумма $a+b$ — число четное. 4) Для того чтобы сумма двух натуральных чисел была нечетным числом, достаточно, чтобы одно из них было четным, а другое — нечетным.

11. Известно, что a — четное натуральное число, b — нечетное и $a>b$. Каким числом будет разность чисел a и b? Высказанное предположение докажите.

12. Кратна ли числу 4 сумма двух последовательных: 1) четных чисел; 2) нечетных чисел?

13. Докажите способом полной индукции, что произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

14. Докажите, что квадрат нечетного натурального числа при делении на 8 дает остаток 1.

15. Докажите, что сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел при делении на 4 дает остаток 1.

16. Докажите, что произведение двух последовательных четных чисел делится на 8.

77. Признаки делимости чисел в десятичной системе счисления

Вам известны признаки делимости на 2, 3, 4, 5 и др. Все они предназначены для чисел, записанных в десятичной системе счисления. Наша задача — обосновать эти признаки, опираясь на введенное определение отношения делимости и способ записи чисел в десятичной системе счисления.

Признак делимости на 2. ***Для того чтобы число x делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8.***

Доказательство. Пусть число x записано в десятичной системе счисления, т. е. $x=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0$ (1), где a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и $a_n\neq 0$ и a_0 принимает значения 0, 2, 4, 6, 8. Докажем, что тогда $x\vdots 2$

Так как $10\vdots 2$, то $10^2\vdots 2$, $10^3\vdots 2$, ..., $10^n\vdots 2$, и, значит, $(a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10)\vdots 2$. По условию a_0 тоже делится на 2, и поэтому число x можно рассматривать как сумму двух слагаемых, каждое из которых делится на 2. Следовательно, согласно теореме о делимости суммы и само число x делится на 2.

Докажем теперь обратное: если число x делится на 2, то его десятичная запись оканчивается одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8.

Запишем равенство (1) в таком виде: $a_0=x-(a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10)$. Но тогда по теореме о делимости разности $a_0\vdots 2$, поскольку $x\vdots 2$ и $(a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10)\vdots 2$. Чтобы однозначное число a_0 делилось на 2, оно должно принимать значения 0, 2, 4, 6, 8.

Признак делимости на 5. ***Для того чтобы число x делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 0 или 5.***

Доказательство этого признака аналогично доказательству признака делимости на 2.

Признак делимости на 4. ***Для того чтобы число x делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы на 4 делилось двузначное число, образованное последними двумя цифрами десятичной записи числа x.***

Доказательство. Пусть число x записано в десятичной системе счисления, т. е. $x=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0$, где a_n, a_{n-1}, ..., a_0 принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и две последние цифры образуют число, которое делится на 4. Докажем, что тогда $x\vdots 4$.

Так как $100\vdots 4$, то $(a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2)\vdots 4$. По условию $a_1\cdot 10+a_0$ (это и есть запись двузначного числа) также делится на 4. Поэтому число x можно рассматривать как сумму двух слагаемых, каждое из которых делится на 4. Следовательно, согласно теореме о делимости суммы и само число x делится на 4.

Докажем обратное, т. е. если число x делится на 4, то двузначное число, образованное последними цифрами его десятичной записи, тоже делится на 4.

Запишем равенство (1) в таком виде: $a_1\cdot 10+a_0=x-(a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2)$. Так как $x\vdots 4$ и $(a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2)\vdots 4$, то по теореме о делимости разности $(a_1\cdot 10+a_0)\vdots 4$. Но выражение $a_1\cdot 10+a_0$ есть запись двузначного числа, образованного последними цифрами записи числа x.

Признак делимости на 9. ***Для того чтобы число x делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 9.***

Доказательство. Докажем сначала, что числа вида 10^n-1 делятся на 9. Действительно, $10^n-1=(9\cdot 10^{n-1}+10^{n-1})-1=(9\cdot 10^{n-1}+9\cdot 10^{n-2}+10^{n-2})-1=(9\cdot 10^{n-1}+9\cdot 10^{n-2}+\ldots+10)-1=9\cdot 10^{n-1}+9\cdot 10^{n-2}+\ldots+9$. Каждое слагаемое полученной суммы делится на 9, значит, и число 10^n-1 делится на 9.

Пусть число x записано в десятичной системе счисления, т. е. $x=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0$, где a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и $(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0)\vdots 9$. Докажем, что тогда $x\vdots 9$.

Преобразуем сумму $a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_0$, прибавив и вычтя из нее выражение $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0$ и записав результат в таком виде: $x=(a_n\cdot 10^n-a_n)+(a_{n-1}\cdot 10^{n-1}-a_{n-1})+\ldots+(a_1\cdot 10-a_1)+(a_0-a_0)+(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0)=a_n(10^n-1)+a_{n-1}\times(10^{n-1}-1)+\ldots+a_1(10-1)+(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0)$.

В последней сумме каждое слагаемое делится на 9:

$a_n\cdot(10^n-1)\vdots 9$, так как $(10^n-1)\vdots 9$,

$a_{n-1}(10^{n-1}-1)\vdots 9$, так как $(10^n-1)\vdots 9$,

. . . . . .

$a_1(10-1)\vdots 9$, так как $(10-1)\vdots 9$,

$(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0)\vdots 9$ по условию. Следовательно, $x\vdots 9$.

Докажем обратное, т. е. если число x делится на 9, то сумма цифр его десятичной записи делится на 9.

Запишем равенство (1) в таком виде: $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0=x-(a_n\cdot(10^n-1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1)+\ldots+a_1(10-1))$. Так как $x\vdots 9$ и $(a_n(10^n-1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1)+\ldots+a_1(10-1))\vdots 9$, то по теореме о делимости разности $(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0)\vdots 9$. Но выражение $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0$ есть сумма цифр десятичной записи числа x.

Признак делимости на 3. ***Для того чтобы число x делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 3.***

Доказательство этого признака аналогично доказательству признака делимости на 9.

Делимость целых неотрицательных чисел в начальном курсе математики специально не изучается. Но использование правил деления суммы на число и числа на произведение требует предварительного ответа на вопрос: делится одно число на другое или нет? Отвечая на этот вопрос, учащиеся начальных классов руководствуются таблицей умножения, а не признаками делимости. Поэтому и задания в учебниках математики содержатся такие, которые позволяют обходиться только таблицей. Например, чтобы из выражений $(62+18):8$, $(36+27):9$, $(40+16):7$ выбрать то, в котором каждое слагаемое суммы делится на указанное число, учащийся должен хорошо знать, что на 9 делится и 36, и 27, а,

например, числа 62 и 18 на 8 не делятся. Аналогично, чтобы найти значение выражения $720:(9\cdot5)$ таким способом: $(720:9):5$, учащийся должен знать, что 720 делится на 9, а 80 делится на 5, т. е. знать еще и отдельные случаи внетабличного деления.

Упражнения

1. Напишите:
1) пятизначное число, которое делится и на 5, и на 9;
2) трехзначное число, которое делится на 3, но не делится на 9;
3) четырехзначное число, которое делится на 2, но не делится на 4;
4) пятизначное число, которое делится и на 4, и на 5.

2. Докажите признаки делимости на 5, 25 и 3.

3. Известно, что запись числа не оканчивается цифрой 5. Делится ли это число на 5?

4. Делится ли на 9 число $10^{26}+8$?

5. Какие из следующих чисел можно представить в виде $9q$:
1) 333; 2) 8021; 3) 10 800?

6. Не выполняя действия сложения, установите, делится ли значение выражения на 4:
1) $284+1440+113$;
2) $284+1440+792\,224$;
3) $284+1441+113$;
4) $284+1441+113+164$.

7. Не выполняя вычитания, установите, делится ли разность на 9:
1) $360-144$; 2) $946-540$; 3) $30\,240-9720$; 4) $321-248$.

8. В каком из случаев (см. упр. 7) разность делится на 4? на 5?

9. Докажите, что число 9 является делителем произведения $2043\cdot402$.

10. Докажите, что разность любого четырехзначного числа и четырехзначного числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 9.

11. Докажите, что если число a при делении на 5 дает в остатке 3, то число a^2+1 делится на 5.

12. Приведите примеры заданий из учебников по математике для начальных классов, выполнение которых требует проверки делимости чисел на данное число.

78. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Возьмем два числа 12 и 8 и выпишем их делители.
Число 12 делится на 1, 2, 3, 4, 6, 12.
Число 8 делится на 1, 2, 4, 8.
У чисел 12 и 8 есть **общие делители.** Это числа 1, 2 и 4. Среди них есть наибольшее число 4. Его называют **наибольшим общим делителем** чисел 12 и 8.

Дадим определения этим понятиям.

Определение. **Общим делителем натуральных чисел a и b называется всякое натуральное число, которое является делителем каждого из данных чисел.**

Определение. **Наибольшим общим делителем натуральных чисел a и b называется наибольшее число из всех общих делителей данных чисел.**

Наибольший общий делитель чисел a и b обозначают $D(a, b)$. Так, $D(12, 8)=4$.

Назовем некоторые свойства наибольшего общего делителя, приняв их без доказательства.

1. Наибольший общий делитель натуральных чисел a и b всегда существует и является единственным.

2. Наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит меньшего из данных чисел, т. е. если $a<b$, то $D(a, b)\leqslant a$.

3. Наибольший общий делитель натуральных чисел a и b делится на любой общий делитель этих чисел.

Например, общими делителями чисел 12 и 8 являются 1, 2, 4. Число 4— наибольший общий делитель чисел 12 и 8. Видим, что он делится и на 1, и на 2.

Возьмем опять два числа 12 и 8 и выпишем несколько чисел кратных 12 и 8. Числа, кратные 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, ...; числа, кратные 8: 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 72, ...

У чисел 12 и 8 есть **общие кратные.** Это числа 24, 48, 72, ... Среди них есть наименьшее число 24. Его называют **наименьшим общим кратным чисел 12 и 8.** Дадим определение этим понятиям.

Определение. **Общим кратным натуральных чисел a и b называется всякое натуральное число, которое кратно каждому из данных чисел.**

Определение. **Наименьшим общим кратным натуральных чисел a и b называется наименьшее число из всех общих кратных данных чисел.**

Наименьшее общее кратное чисел a и b обозначается $K(a, b)$. Так, $K(12, 8)=24$.

Назовем некоторые свойства наименьшего общего кратного двух чисел, приняв их без доказательства.

1. Наименьшее общее кратное натуральных чисел a и b всегда существует и является единственным.

2. Наименьшее общее кратное чисел a и b не меньше большего из данных чисел, т. е. если $a>b$, то $K(a, b)\geqslant a$.

3. Любое общее кратное двух натуральных чисел a и b делится на наименьшее общее кратное этих чисел.

Например, общие кратные чисел 12 и 8 делятся на их наименьшее общее кратное 24: 48:24, 72:24 и т. д.

Наименьшее общее кратное чисел a и b и их наибольший общий делитель взаимосвязаны.

Ранее мы установили, что $K(12, 8)=24$, а $D(12, 8)=4$. Умножим наименьшее общее кратное чисел 12 и 8 на их наиболь-

ший общий делитель: $K(12, 8)\cdot D(12, 8)=24\cdot 4=96$. Найдем теперь произведение данных чисел: $12\cdot 8=96$. Случайно ли совпадение рассматриваемых произведений?

Оказывается, для любых натуральных чисел a и b справедливо утверждение: произведение их наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя равно произведению чисел a и b, т. е. имеет место равенство

$$K(a, b)\cdot D(a, b)=ab.$$

Это равенство позволяет, зная наибольший общий делитель чисел a и b, находить их наименьшее общее кратное:

$$K(a, b)=\frac{ab}{D(a, b)}.$$

В частности, если числа a и b таковы, что их наибольший общий делитель равен 1, то наименьшее общее кратное таких чисел равно произведению ab.

Например, если $a=17$, $b=5$, то другого общего делителя, кроме 1, они не имеют, а значит, $D(17, 5)=1$. Тогда $K(17, 5)=17\cdot 5=85$.

Упражнения

1. Выпишите все делители каждого из чисел 36 и 24 и укажите их общие делители. Чему равен наибольший общий делитель этих чисел?

2. Назовите 6 чисел, кратных числу 36, и 6 чисел, кратных числу 24. Укажите среди них общие кратные. Чему равно наименьшее общее кратное чисел 36 и 24?

3. Верны ли следующие равенства: 1) $D(32, 8)=8$; 2) $K(32, 8)=32$?

4. Учащийся нашел, что $D(136, 225)=17$, а $K(136, 225)=2040$. Как проверить правильность полученных результатов?

5. Найдите наименьшее общее кратное чисел a и b, если известно, что: 1) $D(315, 385)=35$; 2) $D(47, 105)=1$.

79. Признаки делимости на составные числа

Признаки делимости, доказанные ранее, позволяют устанавливать делимость чисел на 2, 3, 4, 5, 9 и 25. А как узнать, не производя деления, делится ли число на 6? на 12? на 30? Можно предположить, например, что число будет делиться на 6, если оно делится на 2 и на 3, но это предложение нуждается в доказательстве.

Признак делимости на 6. ***Для того чтобы число x делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3.***

Доказательство. Пусть число x делится на 6. Тогда из того, что $x\vdots 6$ и $6\vdots 2$, следует, что $x\vdots 2$, а из того, что $x\vdots 6$ и $6\vdots 3$, следует, что $x\vdots 3$. Мы показали, что, для того чтобы число делилось на 6, необходимо, чтобы оно делилось на 2 и на 3.

Докажем достаточность этого условия. Так как $x\vdots 2$ и $x\vdots 3$, то x — общее кратное чисел 2 и 3. Но любое общее кратное чисел делится на их наименьшее кратное, значит, $x:K(2, 3)$. Поскольку $D(2, 3)=1$, то $K(2, 3)=2\cdot 3=6$. Следовательно, $x\vdots 6$.

Признак делимости на 12. ***Для того чтобы число x делилось на 12, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 4.***

Доказательство этого признака аналогично предыдущему.

Признак делимости на 15. ***Для того чтобы число x делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 5.***

Список признаков делимости на составные числа можно продолжить. Их обобщением является следующая теорема:

Теорема. ***Для того чтобы натуральное число делилось на составное число $n=bc$, где числа b и c таковы, что $D(b, c)=1$, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на b и на c.***

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству признака делимости на 6.

Заметим, что данную теорему можно применять многократно. Рассмотрим, например, признак делимости на 60.

Для того чтобы число делилось на 60, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4 и на 15.

Но, в свою очередь, число делится на 15 тогда и только тогда, когда оно делится на 3 и на 5. Поэтому признак делимости на 60 может быть сформулирован иначе:

Для того чтобы число делилось на 60, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4, на 3 и на 5.

Задача. Установить, делятся ли числа 1548 и 942 на 18.

Решение. Сформулируем сначала признак делимости на 18:

Для того чтобы число делилось на 18, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 9.

Почему выбраны числа 2 и 9? Во-первых, $2\cdot 9=18$, а во-вторых, $D(2, 9)=1$, т. е. числа 2 и 9 удовлетворяют теореме о делимости на составное число.

Представление 18 в виде произведения $3\cdot 6$ не годится, потому что $D(3, 6)\neq 1$.

Пользуясь признаком делимости на 2 и на 9, устанавливаем, что $1548\vdots 2$ и $1548\vdots 9$. Следовательно, $1548\vdots 18$.

Число $942\vdots 2$, но оно не делится на 9. Следовательно, число 942 на 18 не делится.

Упражнения

1. Определите, какие из чисел 1032, 2964, 5604, 8910 и 7008 являются кратными числа 12.

2. Напишите три четырехзначных числа, которые делятся на 15.

3. Сформулируйте признак делимости на 20 и напишите 3 пятизначных числа, которые делятся на 20.

4. Установите, какое из чисел можно представить в виде $30q$, где q — натуральное число (деление на 30 не производите):

1) 22 530; 2) 53 420.

5. Пусть A — множество натуральных чисел, кратных 7 и кратных 3. B — множество натуральных чисел, кратных 21. Докажите, что $A=B$.

6. Какие из чисел 14, 35, 70 являются делителями числа 840? (Деления на данные числа не производите.)

7. Верно ли, что при любом натуральном значении n значение выражения $11n$:

1) кратно 11; 2) не кратно 7?

8. Не производя умножения и деления уголком, установите, какие из произведений делятся на 70:

1) $105\cdot20$; 2) $42\cdot12\cdot5$; 3) $85\cdot33\cdot4$.

9. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

10. Докажите, что разность между кубом любого натурального числа и самим числом делится на 6.

80. Нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел способом разложения на простые множители

Представление числа в виде произведения простых чисел называется **разложением этого числа на простые множители.**

Например, запись $110=2\cdot5\cdot11$ говорит о том, что число 110 разложено на простые множители 2, 5 и 11.

Вообще разложить на простые множители можно всякое составное число, причем при любом способе получается одно и то же разложение, если не учитывать порядка множителей. Поэтому представление числа 110 в виде произведения $2\cdot5\cdot11$ или произведения $5\cdot2\cdot11$ есть, по существу, одно и то же разложение числа 110 на простые множители.

Раскладывая числа на простые множители, используют признаки деления на 2, 3, 5 и др. Вспомним способ записи разложения чисел на простые множители. Разложим, например, на простые множители число 720. Число 720 делится на 2. Значит, 2 есть один из простых множителей в разложении числа 720. Разделим 720 на 2. Число 2 пишем справа от знака равенства, а частное 360— под числом 720. Число 360 делим на 2, получаем 180. Делим 180 на 2, получаем 90, делим 90 на 2, получаем 45, делим 45 на 3, получаем 15, делим 15 на 3, получаем 5. Число 5 простое, при делении его на 5 получаем 1. Разложение на множители закончено.

$$
\begin{array}{l|l}
720 & 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5 \\
360 & \\
180 & \\
90 & \\
45 & \\
15 & \\
5 & \\
1 &
\end{array}
$$

Произведение одинаковых множителей принято заменять степенью: $720=2^4\cdot3^2\cdot5$. Такое представление числа 720 называют **каноническим видом** этого числа.

Разложение чисел на простые множители используется при нахождении их наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного.

Найдем, например, наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 3600 и 288.

Представим каждое из данных чисел в каноническом виде.

$$
\begin{array}{l|l}
3600 & 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5=2^4\cdot3^2\cdot5^2; \\
1800 & \\
900 & \\
450 & \\
225 & \\
75 & \\
25 & \\
5 & \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
288 & 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3=2^5\cdot3^2 \\
144 & \\
72 & \\
36 & \\
18 & \\
9 & \\
3 & \\
1 &
\end{array}
$$

В разложение на простые множители наибольшего общего делителя чисел 3600 и 288 должны войти все **общие простые множители,** которые содержатся в разложениях данных чисел, причем каждый из них нужно взять **с наименьшим показателем,** с каким он входит в оба разложения. Поэтому в разложение наибольшего общего делителя чисел 3600 и 288 войдут множители 2^4 и 3^2. Значит, $D\,(3600,\ 288)=2^4\cdot3^2=144$.

В разложение на простые множители наименьшего общего кратного чисел 3600 и 288 должны войти все простые множители, которые содержатся **хотя бы** в одном из разложений чисел 3600 и 288, причем каждый из них нужно взять **с наибольшим показателем,** входящим в оба разложения данных чисел. Поэтому в разложение наименьшего общего кратного чисел 3600 и 288 войдут множители 2^5, 3^2, 5. Значит,

$$K\,(3600,\ 288)=2^5\cdot3^2\cdot5=7200.$$

Вообще чтобы найти наибольший общий делитель данных чисел: 1) представляем каждое данное число в каноническом виде;

2) образуем произведение общих для всех данных чисел простых множителей, причем каждый из них берем с наименьшим показателем, с каким он входит во все разложения данных чисел;

3) находим значение этого произведения — оно и будет наибольшим общим делителем данных чисел.

Чтобы найти наименьшее общее кратное данных чисел:

1) представляем каждое данное число в каноническом виде;

2) образуем произведение из всех простых множителей, находящихся в разложениях данных чисел, причем каждый берем с наибольшим показателем, с каким он входит во все разложения данных чисел;

3) находим значение этого произведения — оно и будет наименьшим общим кратным данных чисел.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найдем наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 60, 252 и 264.

Представим каждое число в каноническом виде: $60=2^2\cdot3\cdot5$, $252=2^2\cdot3^2\cdot7$, $264=2^3\cdot3\cdot11$.

Чтобы найти наибольший общий делитель данных чисел, образуем произведение общих для всех данных разложений простых множителей, причем каждый из них возьмем с наименьшим показателем, с каким он входит во все разложения данных чисел: $D(60, 252, 264)=2^2\cdot3=12$.

Чтобы найти наименьшее общее кратное данных чисел, образуем произведение из всех простых множителей, находящихся в разложениях данных чисел, причем каждый из них возьмем с наибольшим показателем, с каким он входит во все разложения данных чисел:

$$K(60, 252, 264)=2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11=27\,720.$$

Пример 2. Найдем наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 48 и 245. Представим каждое число в каноническом виде: $48=2^4\cdot3$, $245=5\cdot7^2$.

Так как разложения данных чисел не содержат общих простых множителей, то $D(48, 245)=1$, а $K(48, 245)=48\cdot245=10\,760$.

Упражнения

1. Разложите на простые множители числа: 124, 588, 2700, 3780.

2. Какое число имеет разложение:

1) $2^3\cdot3^2\cdot7\cdot13$; 2) $2^2\cdot3\cdot5^3$?

3. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел:

1) 175 и 245; 2) 540 и 558; 3) 120, 80 и 280; 4) 675 и 154.

4. Найдите наименьшее общее кратное всех однозначных четных чисел.

5. Наибольший общий делитель двух чисел, одно из которых 600, равен 120. Наименьшее общее кратное этих же чисел равно 4800. Найдите другое число.

6. Мимо станции железной дороги проходят один за другим три поезда: в первом — 418 пассажиров, во втором — 494 и в третьем — 456. Сколько пассажирских вагонов в каждом поезде, если известно, что в каждом вагоне находится по одинаковому числу пассажиров и их число наибольшее из всех возможных?

81. Алгоритм Евклида

Нахождение наибольшего общего делителя чисел способом разложения их на простые множители иногда сопряжено с рядом трудностей. Например, раскладывая число 6815 на простые множители и найдя первый делитель 5, мы получаем число 1363, наименьшим простым делителем которого является число 29, но, чтобы его найти, надо проверить делимость числа 1363 на 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29— лишь на 29 число 1373 делится нацело.

Существует способ, который позволяет с меньшими трудностями находить наибольший общий делитель данных чисел.

Но прежде обратим внимание на одно важное свойство общих делителей двух чисел. Возьмем, например, числа 525 и 231 и разделим с остатком 525 на 231. Получим: $525=231\cdot2+63$.

Обозначим через A множество общих делителей чисел 525 и 231, а через B множество общих делителей чисел 231 и 63 и докажем, что $A=B$.

Докажем сначала, что любой общий делитель чисел 525 и 231 является общим делителем чисел 231 и 63. Действительно, если $525\vdots d$ и $231\vdots d$, то согласно теореме о делимости разности получаем, что и $63\vdots d$. В этом легко убедиться, если равенство $525=231\cdot2+63$ записать в таком виде: $63=525-231\cdot2$. Таким образом, любой общий делитель чисел 525 и 231 является общим делителем чисел 231 и 63, т. е. $A\subset B$.

Обратно: если t — общий делитель чисел 231 и 63, т. е. $231\vdots t$ и $63\vdots t$, то согласно теореме о делимости суммы $525\vdots t$. Следовательно, любой общий делитель чисел 231 и 63 является и общим делителем чисел 525 и 231, т. е. $B\subset A$.

На основании определения равных множеств имеем, что $A=B$. Но если множества общих делителей данных пар чисел совпадают, то равны их наибольшие общие делители, т. е.

$$D(525, 231)=D(231, 63).$$

Вообще если a и b — натуральные числа и $a=bq+r$, где $r<b$, то $D(a, b)=D(b, r)$.

Доказательство этой теоремы проводится так же, как и доказательство частного случая, проведенного выше.

В чем важность этого свойства? Оно дает возможность при

нахождении наибольшего общего делителя чисел a и b заменить эти числа меньшими, что, конечно, упрощает вычисления. Причем такую замену можно производить неоднократно. Так, разделив с остатком 525 на 231, получаем в остатке 63. Значит, $D(525, 231) = D(231, 63)$. Разделим с остатком 231 на 63: $231 = 63 \cdot 3 + 42$, т. е. $D(231, 63) = D(63, 42)$. Разделим с остатком 63 на 42: $63 = 42 \cdot 1 + 21$, значит, $D(63, 42) = D(42, 21)$. При делении с остатком 42 на 21 в остатке получаем 0, т. е. $D(42, 21) = D(21, 0)$. Наибольший общий делитель чисел 21 и 0 равен 21. Следовательно, число 21 является и наибольшим общим делителем чисел 525 и 231, так как мы установили, что $D(525, 231) = D(231, 63) = D(63, 42) = D(42, 21) = D(21, 0) = 21$.

Вычисления, проведенные нами, часто располагают так:

$$
\begin{array}{r|l}
525 & 231 \\
462 & 2 \\
\hline
231 & 63 \\
189 & 3 \\
\hline
63 & 42 \\
42 & 1 \\
\hline
42 & 21 \\
42 & 2 \\
\hline
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
525 = 231 \cdot 2 + 63 \\
231 = 63 \cdot 3 + 42 \\
63 = 42 \cdot 1 + 21 \\
42 = 21 \cdot 2 + 0
\end{array}
$$

$D(525, 231) = 21$

Рассмотренный способ нахождения наибольшего общего делителя основан на делении с остатком. Он впервые был описан древнегреческим математиком Евклидом (III в. до н. э.) и поэтому носит название алгоритма Евклида.

В общем виде алгоритм Евклида можно сформулировать так:

Пусть a и b — натуральные числа и $a > b$. Если разделить с остатком число a на число b, затем разделить с остатком число b на полученный остаток, а затем разделить с остатком первый остаток на второй остаток и т. д., то последний, отличный от нуля остаток, есть наибольший общий делитель чисел a и b.

Упражнения

1. Докажите, что $D(576, 252) = D(252, 72)$.
2. Найдите с помощью алгоритма Евклида наибольший общий делитель чисел:

1) 375 и 645;
2) 960 и 1200;
3) 12 345 и 7565;
4) 36 354 и 30 295.

3. Докажите, что $D(6025, 1728) = 1$.

4. Во сколько раз $D(6855, 10\,005)$ больше, чем $D(1679, 2231)$?
5. Найдите наименьшее общее кратное чисел 4565 и 960, вычислив наибольший общий делитель этих чисел с помощью алгоритма Евклида.

Глава III

РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА

Из курса математики восьмилетней школы известно, что, кроме чисел натуральных и нуля, существуют другие числа: дробные, целые, рациональные, иррациональные, действительные. Взаимосвязь между различными множествами чисел можно представить наглядно при помощи кругов Эйлера (рис. 121).

Исходным множеством в процессе расширения понятия числа является множество N натуральных чисел. Возникнув в глубокой древности, понятие натурального числа на протяжении многих веков подвергалось расширению и обобщению. Потребность более точно измерять величины привела к понятию дробных положительных чисел. С практикой решения уравнений и теоретическими исследованиями связано возникновение понятия отрицательного числа. Нуль, который вначале обозначал отсутствие числа, после введения отрицательных чисел стал полноправным числом в множестве Z целых чисел, а также в множестве Q рациональных чисел.

В V веке до н. э. в школе Пифагора было установлено, что положительных рациональных чисел недостаточно для точного измерения длин отрезков. Позднее в связи с решением этой проблемы появились числа иррациональные, а в XVI веке с введением десятичных дробей был сделан шаг к числам действительным. Строгое определение действительного числа, обоснование свойств множества действительных чисел были даны в XIX веке.

Понятие действительного числа не последнее в ряду чисел. Процесс расширения понятия числа можно продолжить, и он продолжается — этого требует развитие физики, других наук и самой математики.

Первое знакомство учащихся с дробными числами происходит в начальных классах. Затем понятие дроби уточняется и расширяется в средних классах школы.

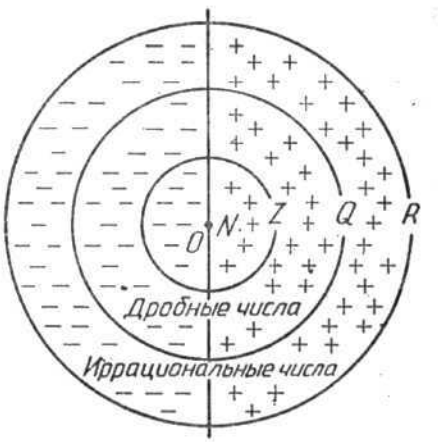


Рис. 121

В связи с этим учителю начальных классов необходимо знать определение дроби и рационального числа, правила выполнения действий над рациональными числами, законы этих действий, а также уметь видеть взаимосвязи множеств рациональных и действительных чисел с множеством натуральных чисел. Это важно для осуществления преемственности изучения математики в начальных и средних классах школы.

§ 12. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

82. Понятие дроби

Исторически появление дробей связано с измерением величин. Выясним, как, например, могут появиться дроби при измерении длины отрезка. При этом будем опираться на те понятия, которые определены ранее в § 9, п. 62.

Возьмем отрезок a. Чтобы найти его длину, выберем в качестве единицы длины отрезок e (рис. 122). При измерении оказалось, что длина отрезка a больше $3e$, но меньше $4e$. Поэтому ее нельзя выразить натуральным числом (при единице длины e). Но если разбить отрезок e на 4 равные части, каждая из которых равна e_1, то длина отрезка a окажется равной $14e_1$. Если же вернуться к первоначальной единице длины e, то мы должны сказать, что отрезок a состоит из 14 отрезков, равных четвертой части отрезка e, т. е., говоря о длине отрезка a, мы вынуждены оперировать двумя натуральными числами 14 и 4. Условились в такой ситуации длину отрезка записывать в виде $\frac{14}{4}e$, а символ $\frac{14}{4}$ называть дробью.

В общем виде понятие дроби определяют так: **пусть даны отрезок a и единичный отрезок e, причем отрезок e является суммой n отрезков, равных e_1. Если отрезок a состоит из m отрезков, равных e_1, то его длина может быть представлена в виде $\frac{m}{n}e$. Символ $\frac{m}{n}$ называют дробью, в нем m и n — натуральные числа. Читают этот символ «эм энных».**

Вернемся к рисунку 122. Выбранный отрезок e_1 есть четвертая часть отрезка e. Очевидно, что это не единственный вариант выбора такой доли отрезка e, которая укладывается целое число раз в отрезке a. Можно взять восьмую часть отрезка e, тогда отрезок a будет состоять из 28 таких долей и его длина будет равна $\frac{28}{8}e$. Можно взять шестнадцатую часть отрезка e, тогда отрезок a будет состоять из 56 таких долей и его длина будет равна $\frac{56}{16}e$. Если представить этот процесс продолженным неограничен-

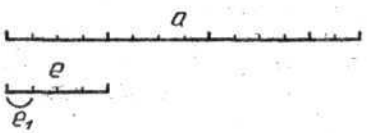


Рис. 122

но, получим, что длина отрезка a может быть выражена бесконечным множеством различных дробей: $\frac{14}{4}, \frac{28}{8}, \frac{56}{16}, \ldots$.

Вообще если при единице длины e длина отрезка a выражается дробью $\frac{m}{n}$, то она может быть выражена любой дробью $\frac{mk}{nk}$, где k — натуральное число.

Определение. **Дроби, выражающие длину одного и того же отрезка при единице длины e, называют равными дробями.**

Если дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ равны, то пишут: $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$. Например, дроби $\frac{14}{4}$ и $\frac{28}{8}$ выражают длину одного и того же отрезка при единице длины e, следовательно, $\frac{14}{4}=\frac{28}{8}$.

Существует признак, пользуясь которым определяют, равны ли данные дроби:

Для того чтобы дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ были равны, необходимо и достаточно, чтобы $mq=np$.

1. Покажем, что $\frac{m}{n}=\frac{p}{q} \Rightarrow mq=np$. Так как $\frac{m}{n}=\frac{mq}{nq}$ для любого натурального q, а $\frac{p}{q}=\frac{pn}{qn}$ для любого натурального n, то из равенства дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ следует равенство $\frac{mq}{nq}=\frac{pn}{nq}$, из которого, в свою очередь, вытекает, что $mq=np$.

2. Покажем, что $mq=np \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{p}{q}$. Если разделить обе части истинного равенства $mq=np$ на натуральное число nq, то получим истинное равенство $\frac{mq}{nq}=\frac{np}{nq}$. Но $\frac{mq}{nq}=\frac{m}{n}$, а $\frac{np}{nq}=\frac{p}{q}$, следовательно, $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$.

Пример. Определим, равны ли дроби $\frac{17}{19}$ и $\frac{23}{27}$. Для этого сравним произведения $17\cdot27$ и $19\cdot23$; $17\cdot27=459$, $19\cdot23=437$. Так как $459\neq437$, то $\frac{17}{19}\neq\frac{23}{27}$.

Из рассмотренных выше фактов вытекает основное свойство дроби: ***если числитель и знаменатель данной дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной.*** На этом свойстве основано сокращение дробей и приведение дробей к общему знаменателю.

Сокращение дробей — это замена данной дроби другой, равной данной, но с меньшим числителем и знаменателем.

Если числитель и знаменатель дроби одновременно делятся толь-

ко на единицу, то дробь называют **несократимой.** Например, $\frac{5}{17}$ — несократимая дробь.

В результате сокращения дроби, как правило, должна получиться равная ей несократимая дробь.

Пример. Сократим дробь $\frac{48}{80}$. Чтобы получить равную ей несократимую дробь, необходимо числитель и знаменатель данной дроби разделить на их наибольший общий делитель. Найдем его: $D(48, 80)=16$. Разделив 48 на 16 и 80 на 16, получаем, что $\frac{48}{80}=\frac{3}{5}$. Дробь $\frac{3}{5}$ несократимая.

Приведение дробей к общему знаменателю — это замена дробей равными им дробями, имеющими одинаковые знаменатели.

Общим знаменателем двух дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ является общее кратное чисел n и q, а наименьшим общим знаменателем — их наименьшее общее кратное $K(n, q)$.

Пример. Приведем к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{8}{15}$ и $\frac{4}{35}$.

Разложим числа 15 и 35 на простые множители: $15=3\cdot5$, $35=5\cdot7$. Тогда $K(15, 35)=3\cdot5\cdot7=105$. Поскольку $105=15\cdot7=35\cdot3$, то $\frac{8}{15}=\frac{8\cdot7}{15\cdot7}=\frac{56}{105}$, $\frac{4}{35}=\frac{4\cdot3}{35\cdot3}=\frac{12}{105}$.

Упражнения

1. Покажите, как в процессе измерения длины отрезка может быть получена дробь: 1) $\frac{7}{3}$; 2) $\frac{13}{4}$; 3) $\frac{2}{5}$.

2. Определите длину отрезков OX и OY, приведенных на рисунке 123.

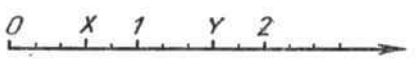


Рис. 123

3. Назовите три дроби, равные: 1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{11}{3}$.

4. Сократите дроби $\frac{275}{980}$ и $\frac{45469}{41033}$.

5. Известно, что при любом натуральном k справедливо равенство $\frac{ak}{bk}=\frac{a}{b}$. Можно ли по аналогии утверждать, что $\frac{a+k}{b+k}=\frac{a}{b}$?

6. Приведите дроби $\frac{17}{24}$, $\frac{13}{136}$ и $\frac{17}{208}$ к общему знаменателю.

83. Понятие положительного рационального числа

В предыдущем пункте мы установили, что одному и тому же отрезку можно поставить в соответствие бесконечное множество равных дробей, выражающих его длину при выбранной единице e. Но длина отрезка должна представляться единственным числом. Поэтому равные дроби считают различными записями одного и того же числа, а само число называют положительным рациональным числом.

Вообще **положительное рациональное число — это множество равных дробей, а каждая дробь, принадлежащая этому множеству, есть запись (представление) этого числа.**

Например, множество $\left\{\frac{4}{3}, \frac{8}{6}, \frac{12}{9}, \frac{16}{12}, \ldots\right\}$ есть некоторое положительное рациональное число, а дроби $\frac{4}{3}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{12}{9}$ и т. д.— это различные записи этого числа.

Множество $\left\{\frac{2}{7}, \frac{4}{14}, \frac{6}{21}, \frac{8}{28}, \ldots\right\}$ определяет другое положительное рациональное число.

Согласно данному выше определению мы, увидев запись $\frac{m}{n}$, должны говорить, что $\frac{m}{n}$ — это дробь или что имеем положительное рациональное число, записанное в виде дроби $\frac{m}{n}$. Чаще говорят короче: «Дано положительное рациональное число $\frac{m}{n}$». Но это не значит, что мы отождествляем понятие положительного рационального числа и дроби. Это разные понятия, но так говорят в целях краткости речи.

Что же представляет собой запись $\frac{5}{9}$? Возможны ответы: «Это дробь», «Это запись положительного рационального числа».

Можно ли сказать, что $\frac{5}{9}$ — это положительное рациональное число? Можно, но только ради краткости речи.

Среди всех записей некоторого положительного рационального числа выделяют несократимую дробь, т. е. дробь, в которой числитель и знаменатель таковы, что их наибольший общий делитель равен 1. Например, среди дробей $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{14}$, $\frac{6}{21}$, $\frac{8}{28}$, ..., определяющих рациональное число, такой дробью является $\frac{2}{7}$.

Вообще для любого положительного рационального числа существует одна и только одна несократимая дробь, являющаяся записью этого числа.

Определяя понятие положительного рационального числа, мы воспользовались измерением длин отрезков. Необходимость выра-

зить точно длину отрезка единственным числом привела к появлению положительных рациональных чисел.

Рассмотрим теперь обратную задачу.

Пусть $\frac{m}{n}$ — запись некоторого рационального числа. Найдется ли такой отрезок, длина которого выражается этим числом?

Доказано, что для любого положительного числа, представленного дробью $\frac{m}{n}$, существует отрезок, длина которого выражается этим числом при выбранной единице длины.

Пример. Построим отрезок, длина которого выражается числом $\frac{13}{4}$. Для этого: 1) выбираем единицу длины e; 2) делим отрезок e на 4 равные части; 3) откладываем на луче Ox 13 отрезков, каждый из которых равен четвертой доле отрезка e.

В результате получаем отрезок OA, длина которого выражается числом $\frac{13}{4}$ (рис. 124).

Множество положительных рациональных чисел обозначают $\boldsymbol{Q}_+$. Покажем, что все натуральные числа содержатся в этом множестве, т. е. что $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Q}_+$.

Пусть длина отрезка a при единице длины e выражается натуральным числом m. Например, на рисунке 125 она представлена числом 4.

Разобьем отрезок e на n равных частей. Тогда n-я доля отрезка e будет укладываться в отрезке a $m \cdot n$ раз, т. е. длина отрезка a будет выражаться дробями вида $\frac{m \cdot n}{n}$ (так, на рисунке 125 длина отрезка a представлена дробью $\frac{4 \cdot 3}{3}$). Но множество этих дробей есть положительное рациональное число. Следовательно, длина отрезка a, с одной стороны, выражается натуральным числом m, а с другой — положительным рациональным числом $\frac{m \cdot n}{n}$. Но это должно быть одно и то же число. Поэтому целесообразно считать, что дроби вида $\frac{mn}{n}$ являются записями натурального числа m. Мы показали, что любое натуральное число m можно представить в виде дроби $\frac{mn}{n}$, следовательно, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Q}_+$.

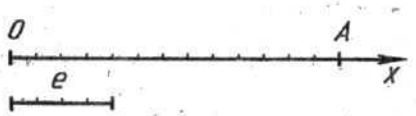


Рис. 124

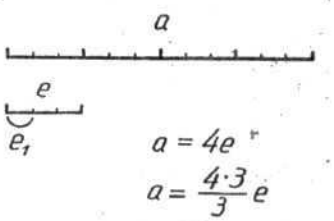


Рис. 125

Пример. Представим натуральное число 7 в виде дробей: $\frac{7}{1}$, $\frac{14}{2}$, $\frac{21}{3}$, $\frac{28}{4}$, $\frac{35}{5}$, ...

Итак, все натуральные числа содержатся в множестве положительных рациональных чисел (рис. 126). Числа, которые дополняют множество натуральных чисел до множества положительных рациональных чисел, называют **дробными числами.**



Рис. 126

Упражнения

1. Верны ли следующие высказывания:

1) Дробь $\frac{3}{8}$ является записью некоторого рационального числа; 2) $\frac{17}{5}$ — дробь; 3) $\frac{17}{5}$ — положительное рациональное число?

2. Рациональные числа представлены дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$. При каком условии эти рациональные числа будут равными?

3. Докажите, что: 1) $\frac{171717}{252525} = \frac{1717}{2525} = \frac{17}{25}$; 2) $\frac{313131}{757575} = \frac{3131}{7575} = \frac{31}{75}$.

4. Докажите, что при любом натуральном значении a следующие дроби несократимы: 1) $\frac{2a+1}{a}$; 2) $\frac{2a+3a+7+a^2}{5a}$.

5. Какие цифры надо подставить вместо $*$, чтобы получилась правильная несократимая дробь: 1) $\frac{285}{2*7}$; 2) $\frac{378}{3*9}$?

6. Дробь $\frac{a}{b}$ несократима. Будет ли сократима дробь $\frac{a}{b+ab}$?

7. Выберите единицу длины и постройте отрезок, длина которого выражается дробью: 1) $\frac{11}{3}$; 2) $\frac{2}{7}$.

84. Сложение и вычитание

Пусть отрезки a, b, c таковы, что $c = a + b$ и при выбранной единице длины e $a = \frac{6}{4}e$, $b = \frac{7}{4}e$ (рис. 127). Тогда $c = a + b = \frac{6}{4}e + \frac{7}{4}e = 6e_1 + 7e_1 = (6+7)\,e_1 = 13e_1 = \frac{13}{4}e$, т. е. длина отрезка c выражается числом $\frac{13}{4}$, которое целесообразно рассматривать как сумму чисел $\frac{6}{4}$ и $\frac{7}{4}$.

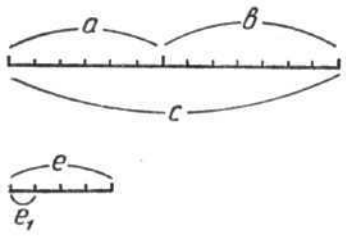


Рис. 127

Определение. Если положительные рациональные числа a и b представлены дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{n}$, то суммой чисел a и b называется число, представляемое дробью $\frac{m+p}{n}$:

$$\boxed{\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}}. \qquad (1)$$

Если положительные рациональные числа a и b представлены дробями с разными знаменателями, то обычно эти дроби приводят к наименьшему общему знаменателю, а потом складывают по правилу (1). Например, $\frac{5}{12}+\frac{2}{15}=\frac{25}{60}+\frac{8}{60}=\frac{25+8}{60}=\frac{33}{60}=\frac{11}{20}$.

Сумма любых двух положительных чисел существует и единственна. Эти положения мы примем без доказательства.

Рассмотренные правила сложения положительных рациональных чисел позволяют считать, что сложение этих чисел сводится, по существу, к сложению натуральных чисел.

Сложение положительных рациональных чисел подчиняется **переместительному и сочетательному законам:**

$$a+b=b+a \text{ для любых } a,\ b\in \boldsymbol{Q}_+;$$
$$(a+b)+c=a+(b+c) \text{ для любых } a,\ b,\ c\in \boldsymbol{Q}_+.$$

Докажем, что для сложения положительных рациональных чисел справедлив переместительный закон. Пусть числа a и b представлены дробями с одинаковыми знаменателями: $a=\frac{m}{n}$, $b=\frac{p}{n}$. Тогда по определению суммы имеем $a+b=\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}$.

Но в числителе дроби $\frac{m+p}{n}$ складываются натуральные числа, а для них, как доказано ранее, имеет место переместительный закон, т. е.

$$\frac{m+p}{n}=\frac{p+m}{n}.$$

Далее, применив опять правило сложения рациональных чисел, получаем:

$$\frac{p+m}{n}=\frac{p}{n}+\frac{m}{n}=b+a.$$

Таким образом, можно сказать, что переместительный закон сложения положительных рациональных чисел вытекает из определения сложения этих чисел и переместительного закона сложения натуральных чисел.

Аналогично доказывается и сочетательный закон.

В связи с определением сложения рациональных чисел возникает возможность уточнить смысл записей вида $3\frac{1}{4}$, $12\frac{5}{7}$.

Различают **правильные и неправильные дроби.** Дробь $\frac{m}{n}$ называют правильной, если ее числитель меньше знаменателя, и неправильной, если ее числитель больше знаменателя или равен ему.

Пусть $\frac{m}{n}$ — неправильная дробь. Тогда $m\geqslant n$. Если m кратно n, то в этом случае дробь $\frac{m}{n}$ является записью натурального числа. Например, если дана дробь $\frac{15}{3}$, то $\frac{15}{3}=5$. Если число m не кратно n, то разделим m на n с остатком: $m=nq+r$, где $r<n$. Подставим $nq+r$ вместо m в дробь $\frac{m}{n}$ и применим правило (1):

$$\frac{m}{n}=\frac{nq+r}{n}=\frac{nq}{n}+\frac{r}{n}=q+\frac{r}{n}.$$

Поскольку $r<n$, то дробь $\frac{r}{n}$ правильная. Следовательно, дробь $\frac{m}{n}$ оказалась представленной в виде суммы натурального числа q и правильной дроби $\frac{r}{n}$. Это действие называют выделением целой части из неправильной дроби. Например, $\frac{13}{4}=\frac{4\cdot3+1}{4}=\frac{4\cdot3}{4}+\frac{1}{4}=3+\frac{1}{4}$. Принято сумму натурального числа и правильной дроби записывать без знака сложения, т. е. вместо $3+\frac{1}{4}$ пишут $3\frac{1}{4}$ и называют такую запись смешанным числом.

Справедливо и обратное утверждение: всякое смешанное число можно записать в виде неправильной дроби. Например:

$3\frac{1}{4}=3+\frac{1}{4}=\frac{3\cdot4}{1\cdot4}+\frac{1}{4}=\frac{12+1}{4}=\frac{13}{4}$, т. е. $3\frac{1}{4}=\frac{3\cdot4+1}{4}=\frac{13}{4}$.

Рассмотрим вычитание положительных рациональных чисел.

Определение. **Разностью положительных рациональных чисел a и b называется такое положительное рациональное число c, что $a=b+c$.**

Понятие разности определено, а как практически из одного положительного рационального числа вычесть другое?

Пусть $a=\frac{m}{n}$, $b=\frac{p}{n}$, а разность $a-b$ пусть представляется дробью $\frac{x}{n}$. Найдем x. По определению разности $\frac{m}{n}=\frac{p}{n}+\frac{x}{n}$, а по правилу (1) $\frac{p}{n}+\frac{x}{n}=\frac{p+x}{n}$. Таким образом, $m=p+x$, но m, p

и x — числа натуральные, а для них эта запись означает, что $x=m-p$. Приходим к следующему правилу:

$$\boxed{\frac{m}{n}-\frac{p}{n}=\frac{m-p}{n}}. \qquad (2)$$

Упражнения

1. Сложите дроби, предварительно сократив их, если это возможно:

1) $\frac{15}{120}+\frac{17}{68}+\frac{39}{78}$; 2) $3\frac{11}{12}+5\frac{3}{15}+1\frac{2}{9}$; 3) $1\frac{4}{40}+5\frac{4}{5}+\frac{10}{30}$.

2. Вычислите наиболее рациональным способом, применяя законы сложения:

1) $\frac{2}{15}+1\frac{5}{13}+3\frac{1}{5}+4\frac{3}{26}$; 2) $2\frac{4}{9}+3\frac{1}{14}+5+2\frac{6}{14}+3\frac{5}{9}$;

3) $5\frac{15}{24}+3\frac{22}{33}+1\frac{32}{48}+1\frac{7}{24}+\frac{2}{3}$.

3. Найдите разность: 1) $10\frac{59}{63}-8\frac{37}{45}$; 2) $105\frac{2}{17}-3\frac{1}{13}$.

4. Сумму чисел $24\frac{5}{24}$ и $22\frac{5}{6}$ уменьшите на $7\frac{7}{15}$. Сколькими способами это можно сделать?

5. Какое из чисел ближе к 1: $\frac{79}{97}$ или $\frac{67}{85}$?

6. Найдите значение выражения:

1) $2\frac{7}{15}-1\frac{1}{12}+\left(2\frac{7}{90}-\left(1\frac{1}{2}-\frac{8}{45}\right)\right)$;

2) $\left(24-3\frac{7}{36}\right)-\left(21\frac{5}{12}-\frac{11}{18}\right)$.

85. Умножение и деление

На рисунке 128 приведены такие отрезки a, e и e_1, что $a=\frac{11}{3}e$; $e=\frac{6}{5}e_1$. Надо узнать, каким будет значение длины данного отрезка a при единице длины e_1. Так как $3a=11e$, а $5e=6e_1$, то, умножив первое равенство на 5, а второе на 11, получим $5\cdot 3a=11\cdot 5e$ и $11\cdot 5e=6\cdot 11e_1$, откуда $5\cdot 3a=6\cdot 11e_1$ или $15a=66e_1$. Последнее равенство означает, что $a=\frac{66}{15}e_1$, т. е. длина отрезка a при единице длины e_1 выражается числом $\frac{66}{15}$, которое целесообразно рассматривать как произведение $\frac{11}{3}$ и $\frac{6}{5}$.

Определение. **Если положительные рациональные числа**

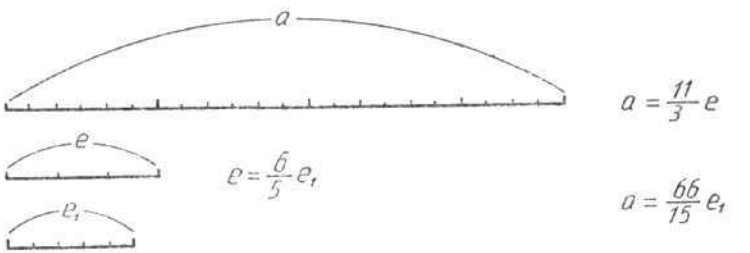


Рис. 128

представлены дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$, **то их произведение есть число,** представляемое дробью $\frac{mp}{nq}$:

$$\boxed{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}}. \qquad (3)$$

Умножение положительных рациональных чисел подчиняется переместительному, сочетательному и распределительному относительно сложения законам. Доказываются они аналогично тому, как были доказаны законы сложения.

Определение. **Частным двух положительных рациональных чисел a и b называется такое число c, что $a=bc$.**

Мы определили частное чисел a и b, но как найти его, если известно, что $a=\frac{m}{n}$, $b=\frac{p}{q}$? Покажем, что число $c=\frac{mq}{np}$ и есть это частное. По определению частного $a=bc=\frac{p}{q}\cdot\frac{mq}{np}$. Применив правило (3) умножения положительных рациональных чисел и законы умножения, выполним преобразования:

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{mq}{np}=\frac{p\,(mq)}{q\,(np)}=\frac{(pq)\,m}{(pq)\,n}.$$

Сократим полученную дробь на натуральное число pq:

$$\frac{(pq)\,m}{(pq)\,n}=\frac{m}{n}.$$

Таким образом, частное двух положительных рациональных чисел находят по формуле

$$\boxed{\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{mq}{np}}. \qquad (4)$$

Полученная формула показывает, что для любых положительных рациональных чисел частное существует, т. е. в множестве Q_+ стало всегда выполнимым деление, которое не всегда можно было выполнить в множестве натуральных чисел.

Заметим, что знак черты в записи дроби $\frac{m}{n}$ можно рассматривать как знак действия деления. Действительно, возьмем два натуральных числа m и n и найдем их частное по правилу (4):

$$m:n=\frac{m}{1}:\frac{n}{1}=\frac{m\cdot 1}{n\cdot 1}=\frac{m}{n}.$$

Обратно: если дана дробь $\frac{m}{n}$, то $\frac{m}{n}=\frac{m\cdot 1}{n\cdot 1}=\frac{m}{1}:\frac{n}{1}=m:n$.

Так как $\frac{m}{n}=m:n$, то любое положительное рациональное число можно рассматривать как частное двух натуральных чисел. Кстати, термин «рациональное число» произошел от латинского слова *ratio*, что в переводе на русский язык означает «отношение» (частное).

Упражнения

1. Запишите, используя символы, законы умножения положительных рациональных чисел и докажите их.

2. Вычислите, применяя законы умножения: 1) $\frac{3}{5}\cdot 3\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}$; 2) $\frac{4}{7}\cdot 6\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}$; 3) $\frac{5}{8}\cdot\frac{17}{18}\cdot 1\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{7}$; 4) $\left(4\frac{2}{3}+3\frac{3}{10}\right)\cdot\frac{5}{11}$.

3. Выполните указанные действия: 1) $8\frac{6}{57}:12\frac{3}{19}$; 2) $\left(4\frac{1}{2}\times\right.$ $\left.\times 5\frac{2}{3}\right):6\frac{3}{4}$; 3) $4\frac{1}{4}:\left(11\frac{1}{3}\cdot 5\frac{1}{4}\right)$.

4. Решите уравнение, используя зависимость между компонентами и результатом действия: 1) $5\cdot\left(\frac{3}{4}x-20\right)=8$; 2) $\left(4\frac{1}{2}-\right.$ $\left.-2x\right)\cdot 3\frac{2}{3}=\frac{11}{15}$; 3) $\left(10\frac{2}{5}+x\right):1\frac{1}{7}=9\frac{1}{3}$; 4) $\frac{4}{9}:\left(3\frac{2}{3}-5x\right)=$ $=\frac{1}{6}$.

5. Решите арифметическим способом:

1) Девочка прочитала книгу в 324 страницы за четыре дня. В первый день она прочитала $\frac{2}{9}$ всей книги, во второй и третий дни — по $\frac{3}{7}$ того, что осталось после первого дня. Сколько страниц прочитала девочка в четвертый день?

2) В квартире две комнаты. Длина одной равна $5\frac{1}{4}$ м, длина второй составляет $\frac{2}{3}$ этой длины. Ширина каждой комнаты $3\frac{1}{5}$ м. Площадь этих комнат составляет $\frac{7}{10}$ площади всей квартиры. Чему равна площадь квартиры?

3) Группа туристов наметила пройти путь от турбазы до озера за четыре дня. В первый день они наметили пройти $\frac{1}{4}$ всего пути, во второй $\frac{3}{7}$ оставшегося, а в третий и четвертый проходить по 12 км. Какова длина всего пути от турбазы до озера?

6. Нижеприведенные задачи решите различными способами:

1) Путь от города A до города B состоит из двух равных по длине участков. На первом участке автобус шел со скоростью 55 км/ч, а на втором — со скоростью 65 км/ч, затратив на весь путь 6 ч. Сколько времени затратил автобус на прохождение каждого участка пути?

2) Весь путь между городами A и B грузовая машина проходит за 4 ч 15 мин при средней скорости 48 км/ч. За сколько времени пройдет этот же путь легковая машина, если ее средняя скорость 84 км/ч?

86. Упорядоченность множества положительных рациональных чисел

Если рациональные числа представлены равными дробями, то они равны. Например, если рациональное число a представлено дробью $\frac{3}{4}$ $\left(a=\frac{3}{4}\right)$, а рациональное число b представлено дробью $\frac{6}{8}$ $\left(b=\frac{6}{8}\right)$, то $a=b$, поскольку $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$.

Но как узнать, какое из рациональных чисел a и b меньше (больше)?

Определение. **Пусть a и b — положительные рациональные числа. Тогда a меньше b $(a<b)$, если существует такое положительное рациональное число c, что $a+c=b$.**

В этом же случае говорят, что b больше a $(b>a)$.

Данное определение позволяет сформулировать необходимое и достаточное условия существования разности в множестве положительных рациональных чисел.

Для того чтобы разность положительных рациональных чисел a и b существовала, необходимо и достаточно, чтобы $b<a$.

Доказательство этого условия аналогично доказательству теоремы о существовании разности в множестве натуральных чисел.

Из введенного определения отношения «меньше» можно вывести практические приемы установления этого отношения.

1. Если $a=\frac{m}{n}$, $b=\frac{p}{n}$, то $a<b$ тогда и только тогда, когда $m<p$.

Например, если $a=\frac{3}{14}$, $b=\frac{9}{14}$, то $a<b$, так как $3<9$.

2. Если $a=\frac{m}{n}$, $b=\frac{p}{q}$, то $a<b$ тогда и только тогда, когда $mq<np$.

Действительно, приведем дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ к общему знаменателю: $\frac{m}{n}=\frac{mq}{nq}$, $\frac{p}{q}=\frac{pn}{qn}$. В результате сравнение данных дробей свелось к сравнению их числителей: если $mq>pn$, то $a>b$; если $mq<pn$, то $a<b$.

Например, если $a=\frac{7}{8}$, $b=\frac{11}{13}$, то $b<a$, поскольку $7\cdot13=91$, $8\cdot11=88$ и $8\cdot11<7\cdot13$.

Можно показать, что так определенное отношение «меньше» транзитивно и антисимметрично, т. е. является отношением порядка на множестве положительных рациональных чисел, а само это множество является **упорядоченным множеством.**

Заметим, что отношение порядка в множестве положительных рациональных чисел обладает свойствами, которые отличают его от отношения порядка в множестве натуральных чисел. Как известно, в множестве $\boldsymbol{N}$ есть наименьшее число — единица и множество $\boldsymbol{N}$ дискретно — между натуральными числами нет других натуральных чисел. ***В множестве положительных рациональных чисел:***

1) нет наименьшего числа;

2) между любыми двумя различными положительными рациональными числами заключено бесконечно много чисел множества $\boldsymbol{Q}_+$.

Докажем, что в множестве $\boldsymbol{Q}_+$ нет наименьшего числа. Предположим, что число $\frac{m}{n}$ наименьшее в множестве положительных рациональных чисел. Образуем число $\frac{m}{n+1}$. Легко убедиться в том, что $\frac{m}{n+1}<\frac{m}{n}$ $(mn<mn+m)$, т. е. нашлось такое положительное рациональное число, которое меньше $\frac{m}{n}$. Следовательно, наше предположение неверное. В множестве положительных рациональных чисел наименьшего числа нет.

Второе свойство проиллюстрируем на примере. Возьмем два рациональных числа $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Существует ли такое рациональное число, которое больше $\frac{1}{3}$ и меньше $\frac{2}{3}$? Существует. Для этого достаточно найти среднее арифметическое данных чисел $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right):2=\frac{1}{2}$. Таким образом, $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$. Есть ли еще число, которое находилось бы между $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$? Есть. Чтобы его найти, достаточно найти среднее арифметическое чисел $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$: $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right):2=\frac{5}{12}$. Таким образом $\frac{1}{3}<\frac{5}{12}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$. Ясно, что описанный процесс можно продолжать: между любыми двумя различными числами из $\boldsymbol{Q}_+$ заключено бесконечно много чисел того же множества. Это свойство множества $\boldsymbol{Q}_+$ называют **свойством плотности.**

Упражнения

1. Установите различными способами, какое из чисел больше:
1) $\frac{19}{34}$ или $\frac{28}{51}$; 2) $\frac{39}{8513}$ или $\frac{26}{5675}$; 3) $\frac{37}{99}$ или $\frac{3737}{9999}$.

2. Что больше и на сколько: сумма чисел $20\frac{5}{7}$, $42\frac{5}{6}$ и $2\frac{20}{21}$ или разность чисел $125\frac{5}{14}$ и $51\frac{5}{18}$?

3. Сравните, не выполняя умножения, значения выражений:
1) $315\cdot\frac{5}{7}$ и $317\cdot\frac{3}{4}$; 2) $\frac{17}{3}\cdot12\frac{4}{7}$ и $\frac{15}{4}\cdot12\frac{4}{7}$

4. Не выполняя вычислений, сравните выражения:
1) $34\frac{1}{3}\left(8\frac{2}{3}+2\frac{3}{4}\right)$ и $34\frac{1}{3}\left(8\frac{2}{3}+2\frac{1}{4}\right)$;
2) $82\frac{19}{17}\left(13\frac{51}{52}+17\frac{1}{6}\right)$ и $\left(13\frac{51}{52}+17\frac{1}{7}\right)82\frac{19}{17}$.

5. Не выполняя вычислений, расположите в порядке возрастания значений выражения: $7\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$; $8\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}$; $\frac{5}{6}\cdot7\frac{1}{2}$; $\frac{6}{7}\cdot8\frac{2}{3}$; $8\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}$.

6. Назовите три рациональных числа, заключенных между числами $\frac{3}{11}$ и $\frac{4}{11}$.

7. Докажите, что если a, b, c, d — натуральные числа и $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

8. Решите нижеприведенные задачи различными способами:

1) В городе три средние школы. Число учащихся первой составляет $\frac{3}{10}$ всех учащихся этих трех школ, во второй школе учащихся в $1\frac{1}{2}$ раза больше, чем в первой, а в третьей школе на 420 учащихся меньше, чем во второй. Сколько всего учащихся в трех школах?

2) Из двух пунктов, расстояние между которыми 25 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода. Один

из них проходил в час на $\frac{3}{4}$ км больше другого. С какой скоростью шел каждый, если через 2 ч после выхода расстояние между ними стало $7\frac{1}{2}$ км?

87. Запись положительных рациональных чисел в виде десятичных дробей

Как мы увидели ранее, одним из источников появления дробей является измерение величин, а точнее, переход от одной единицы величины к другой, причем знаменатель дроби показывает, на сколько долей делится исходная единица величины.

В связи с тем что в практической деятельности человек пользуется десятичной системой счисления, то новые единицы величин получают из исходных, уменьшая данные в 10, 100, 1000 и т. д. раз. Например, 1 дм = 10 см = 100 мм; 1 км = 1000 м = 10 000 дм; 1 кг = = 1000 г и т. д. Поэтому для практики особую важность имеют те дроби, знаменатели которых являются степенями 10. Всякую такую дробь можно записать в виде десятичной дроби. Например, $\frac{341}{10^2}=3{,}41$, $\frac{4}{10^3}=0{,}004$.

В отличие от десятичных дробей дроби вида $\frac{m}{n}$ называются **обыкновенными.**

Выясним смысл записи числа в виде десятичной дроби. Возьмем дробь $\frac{4362}{10^2}$ и выполним следующие преобразования:

$$\frac{4362}{10^2}=\frac{4\cdot10^3+3\cdot10^2+6\cdot10+2}{10^2}=4\cdot10+3+\frac{6}{10}+\frac{2}{10^2}.$$

Сумма $4\cdot10+3$ является записью целого числа 43, а сумма $\frac{6}{10}+\frac{2}{10^2}$ есть запись дробной части числа $\frac{4362}{10^2}$. Эту дробную часть принято записывать без знаменателя, отделяя от целой части числа запятой: $\frac{4362}{10^2}=43{,}62$.

Как вы знаете, сравнение десятичных дробей и выполнение действий над ними сводится, по существу, к сравнению и действиям над натуральными числами. Например, $0{,}3472<0{,}3480$, так как при равенстве числа десятых и сотых долей число тысячных долей у первого числа меньше, чем у второго $(7<8)$.

Простота сравнения и выполнения действий над десятичными дробями приводит к вопросу: любую ли дробь вида $\frac{m}{n}$ $(m,\ n\in N)$ можно записать в виде десятичной дроби?

Возьмем, например, дроби $\frac{8}{25}$ и $\frac{3}{7}$. Дробь $\frac{8}{25}$ равна дроби $\frac{32}{100}$, значит, $\frac{8}{25}=0{,}32$. Но для дроби $\frac{3}{7}$ нельзя найти равную ей дробь со знаменателем, представляющим степень 10. Почему? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема (ее мы примем без доказательства):

Для того чтобы несократимая дробь $\frac{m}{n}$ была равна десятичной дроби, необходимо и достаточно, чтобы в разложение ее знаменателя на простые множители входили лишь числа 2 или 5.

Так, дробь $\frac{19}{80}$ можно записать в виде десятичной, поскольку она несократимая и в разложении знаменателя на простые множители содержатся только числа 2 и 5: $80=2^4\cdot5$.

Дробь $\frac{11}{15}$ нельзя записать в виде десятичной дроби, в разложении ее знаменателя на простые множители содержится число 3: $15=3\cdot5$.

Среди десятичных дробей выделяют и часто используют дробь 0,01. Ее называют **процентом** и обозначают 1%. На практике в процентах выражают части величины. Так, говорят, что цены на товары снижены на 20%, сахарный тростник содержит 15% сахара. Зная это, можно найти, например, сколько сахара содержится в 10 т тростника. Для этого нужно дробь 0,15 умножить на 10: $0{,}15\cdot10$ т $=1{,}5$ т. Следовательно, 15% от 10 т составляет 1,5 т.

Упражнения

1. Учащемуся было предложено установить, можно ли дробь $\frac{195}{260}$ записать в виде десятичной. Разложив знаменатель этой дроби на простые множители, он получил, что $260=2^2\cdot5\cdot13$, и сделал вывод, что дробь $\frac{195}{260}$ нельзя записать в виде десятичной дроби. Учитель оценил ответ учащегося как неправильный. Почему?

2. Какие из дробей $\frac{21}{28}$, $\frac{192}{375}$, $\frac{15}{24}$, $\frac{13}{20}$ можно записать в виде десятичной дроби?

3. Даны записи чисел: 0,40; $\frac{500}{100}$; 0,4; $\frac{6}{3}$; 5; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$; 0,6; $\frac{12}{20}$. Сколько различных чисел написано? Сколько среди этих чисел дробных?

4. Найдите и обоснуйте наиболее рациональный способ нахождения значения выражения:

1) $8{,}3+3{,}85+9{,}7+5{,}15+2{,}25+0{,}125$;
2) $8{,}7\cdot 7+7\cdot 7{,}3$.

5. Вычислите наиболее рациональным способом:

1) $\dfrac{6{,}75^2+0{,}125\cdot 67{,}5}{5{,}9^2-(1{,}03+1{,}89726:0{,}618)^2}$;

2) $\dfrac{3{,}05^2-2{,}55^2}{0{,}35\cdot 388-28{,}8\cdot(20{,}56-14{,}501:0{,}85)}$;

3) $\dfrac{(81{,}624:4{,}8-4{,}505)^2+125\cdot 0{,}75}{((0{,}44^2:0{,}88+3{,}53)^2-2{,}75^2):0{,}52}$.

6. Найдите значение выражения:

1) $(60{,}3-53{,}235:3{,}9)\cdot 1{,}4+10{,}2\cdot 12$;
2) $15{,}85-3{,}4\cdot(50-(1{,}530+0{,}4))+3{,}57:1{,}7$.

7. Решите уравнение, используя зависимость между компонентами и результатами действий:

1) $(x\cdot 100-0{,}7357):0{,}01-15{,}88=0{,}55$;
2) $14:((0{,}4x+0{,}16):x)+5=12$.

8. Какой смысл имеют предложения:

1) Членские взносы члена профсоюза составляют 1% его заработной платы.

2) Производительность труда возросла на 7%.

3) Цена на радиоаппаратуру снизилась на 18%.

9. Решите следующие задачи:

1) В цистерне было 936 л бензина. Когда перекачали 12,5% этого бензина в пустую бочку, то она оказалась наполненной на 32,5% своего объема. Найдите объем бочки.

2) На окраску 72% площади пола пошло 4,5 кг краски. Сколько пойдет краски на оставшуюся площадь пола?

3) Завод выполнил план I квартала, выплавив 225 т металла, во II квартале план был перевыполнен на 3,2%, а в III — завод дал металла на 6,3 т больше, чем во II. На сколько процентов завод перевыполнил план в III квартале, если план на каждый квартал оставался одним и тем же?

4) Длину прямоугольной пластины уменьшили на 20%, а ширину увеличили на 20%. Изменилась ли площадь пластины? Если изменилась, то как?

10. Выполните действия:

1) $17\frac{1}{2}-8{,}25\cdot\frac{10}{11}\cdot\left(11\frac{2}{3}:2\frac{2}{9}+3{,}5\right)$;

2) $((1{,}72:0{,}8+0{,}7)\cdot 0{,}8):\left(\left(7-3{,}5\cdot 1\frac{5}{8}\right):3\frac{1}{2}\right)-0{,}152$;

3) $\left(6\frac{9}{35}-5\frac{5}{25}\right)\cdot 7-12{,}505:4{,}1+1{,}25\cdot 0{,}32\,(36{,}096:1{,}2-29{,}88)-$
$-3{,}58$.

88. Бесконечные десятичные периодические дроби

Возьмем дробь $\frac{6}{7}$. Так как ее знаменателем является число 7, то эту дробь нельзя записать в виде десятичной. При этом имеется в виду конечная десятичная дробь. Значит, процесс деления числа 6 на 7 должен быть бесконечным, в противном случае число $\frac{6}{7}$ можно было бы записать в виде конечной десятичной дроби. Поэтому считают, что дробь $\frac{6}{7}$ равна бесконечной десятичной дроби. Кроме того, при делении числа 6 на 7 обнаруживается, что в частном группа цифр повторяется: $\frac{6}{7}=0{,}857142857142857142\ldots$. Такая последовательно повторяющаяся группа цифр после запятой в десятичной записи числа называется **периодом**, а бесконечная десятичная дробь, имеющая период в своей записи, называется **периодической**. Период принято записывать один раз в круглых скобках: $\frac{6}{7}=0{,}(857142)$.

Различают **чисто периодические дроби** — в них период начинается сразу после запятой, и **смешанно периодические дроби** — в них между запятой и периодом есть другие десятичные знаки. Например, $0{,}(857142)$ — чисто периодическая дробь, а $3{,}27(346)$ смешанно периодическая дробь.

Но всегда ли в случаях, когда знаменатель несократимой дроби имеет в своем разложении простой множитель, отличный от 2 и 5, дробь $\frac{m}{n}$ представляется периодической десятичной дробью? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема:

Если дробь $\frac{m}{n}$ несократима и в разложении знаменателя есть простой множитель, отличный от 2 и 5, то дробь $\frac{m}{n}$ представляется бесконечной десятичной периодической дробью.

Доказательство. Так как в разложении знаменателя есть простой множитель, отличный от 2 и 5, то процесс деления m на n бесконечен. Кроме того, при делении m на n получаются остатки, меньшие n, т. е. числа $1, 2, \ldots, n-1$. Поскольку множество различных остатков конечно, то, начиная с некоторого шага, какой-то остаток повторится, что повлечет за собой повторение знаков частного. Следовательно, бесконечная десятичная дробь, представляющая число $\frac{m}{n}$, будет обязательно периодической.

Доказанная теорема позволяет сделать вывод: ***любое положительное рациональное число представимо либо конечной десятичной дробью, либо бесконечной десятичной периодической дробью.***

Этот вывод может быть более коротким, если условиться считать конечную десятичную дробь бесконечной с периодом, рав-

ным 0. Например, $7{,}82 = 7{,}82(0)$. Такое соглашение позволяет говорить, что ***любое положительное рациональное число представимо бесконечной десятичной периодической дробью.*** Справедливо и обратное утверждение: ***любая положительная бесконечная десятичная периодическая дробь выражает некоторое положительное рациональное число.***

Чтобы записать положительное рациональное число $\frac{m}{n}$ в виде бесконечной десятичной периодической дроби, нужно числитель m делить на знаменатель n. Рассмотрим теперь обратную задачу: как записать бесконечную десятичную периодическую дробь в виде обыкновенной.

Пусть дана бесконечная десятичная периодическая дробь $0,(28)$, т. е. $0{,}28282828\ldots$. Обозначим соответствующее ей рациональное число через a, тогда $a = 0{,}282828\ldots$. Умножив обе части этого равенства на 100, получим:

$$100a = 28{,}2828\ldots \text{ или}$$
$$100a = 28 + 0{,}2828\ldots = 28 + a.$$

Решив уравнение $100a = 28 + a$, получаем, что $a = \frac{28}{99}$. Эта дробь несократимая.

Вообще ***чисто периодическая бесконечная десятичная дробь равна такой обыкновенной дроби, числитель которой равен периоду, а знаменатель состоит из стольких девяток, сколько цифр в периоде дроби.***

Пусть дана смешанно периодическая дробь $0,8(61)$, т. е. $0{,}86161\ldots$. Обозначим соответствующее ей рациональное число через a, тогда $a = 0{,}86161\ldots$. Умножив обе части этого равенства на 10, получим $10a = 8{,}6161\ldots$— чисто периодическую дробь. Дальнейшие преобразования проводятся аналогично выполненным выше. Положим $x = 8{,}6161\ldots$. Умножим обе части этого равенства на 100: $100x = 861{,}6161\ldots$, или $100x = 861 + 0{,}6161\ldots$. Прибавим к обеим частям по 8: $100 + 8 = 861 + 8{,}6161\ldots$. Но так как $8{,}6161\ldots = x$, получаем уравнение $100 + 8 = 861 + x$, откуда $x = \frac{861 - 8}{99}$. Подставим это значение x в равенство $10a = 8{,}6161\ldots$:

$$10a = \frac{861 - 8}{99}, \text{ откуда } a = \frac{867 - 8}{990} = \frac{853}{990}.$$

Вообще ***смешанно периодическая дробь с нулем в целой части равна такой обыкновенной дроби, числитель которой равен разности между числом, записанным цифрами, стоящими до начала второго периода, и числом, записанным цифрами, стоящими до начала первого периода, а знаменатель состоит из такого числа девяток, сколько цифр в периоде, и такого числа нулей, сколько цифр стоит до начала первого периода.***

Следует заметить, что сформулированные правила обращения бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную не совсем корректны; при их выводе действия над бесконечными дробями выполнялись по правилам, определенным для конечных десятичных дробей.

Упражнения

1. Объясните, почему дроби $\frac{17}{19}$ и $\frac{8}{33}$ нельзя записать в виде конечной десятичной дроби.

2. Представьте число $\frac{10}{11}$ в виде бесконечной десятичной дроби и объясните, почему эта дробь является периодической.

3. Запишите в виде бесконечных десятичных дробей следующие обыкновенные дроби:

1) $\frac{8}{33}$; 2) $\frac{137}{18}$; 3) $\frac{127}{28}$.

4. Запишите в виде обыкновенной дроби:

1) $0,(43)$; 2) $0,(301)$; 3) $5,7(27)$; 4) $6,31(8)$; 5) $15,43(29)$.

5. Докажите, что $0,27(9) = 0,28(0)$.

6. Установите, какие из следующих равенств истинные:

1) $\frac{66}{33} = 2,(6)$; 2) $\frac{56}{11} = 5,(09)$; 3) $20,8 + \frac{7}{11} = 20,8(63)$.

7. Расположите числа в порядке возрастания:

1) $0{,}125$; $2,(7)$; $0,1(25)$; $2{,}78$; 2) $1,(5)$; $0,(12)$; $2{,}778$; $2,(778)$.

§ 13. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

89. Понятие положительного иррационального числа

Как известно, действия над положительными рациональными числами удобно производить, если они представлены десятичными дробями. Поэтому целесообразно и результаты измерения величин, в частности длин отрезков, представлять в виде десятичной дроби.

Как это можно сделать?

Пусть a — отрезок, длину которого надо измерить, отрезок e — единица длины. И пусть отрезок a состоит из n отрезков, равных e, и отрезка a_1, который короче отрезка e (рис. 129), т. е. $ne < a < (n+1)e$. Числа n и $n+1$ есть приближенные значения длины отрезка a при единице длины e с недостатком и с избытком с точностью до единицы.

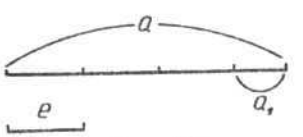


Рис. 129

Чтобы получить ответ с большей точностью, возьмем отрезок e_1 — десятичную часть отрезка e и будем укладывать его в отрезке a_1. При этом возможны два случая:

1) Отрезок e_1 уложился в отрезке a_1 точно n_1 раз. Тогда длина отрезка a выражается конечной десятичной дробью: $a=\left(n+\frac{n_1}{10}\right)e=n,n_1e$. Например, $a=3{,}4e$.

2) Отрезок a_1 оказывается состоящим из n_1 отрезков, равных e_1, и отрезка a_2, который короче e_1. Тогда $n,n_1e<a<n,n_1'e$, где n,n_1 и n,n_1' — приближенные значения длины отрезка a с недостатком и с избытком с точностью до 0,1.

Ясно, что в случае 2 процесс десятичного измерения длины отрезка a можно продолжать, взяв новый единичный отрезок $e_2=\frac{e}{100}$.

На практике этот процесс десятичного измерения длины отрезка на каком-то этапе закончится. И следовательно, в этой ситуации результатом измерения длины отрезка будет либо натуральное число, либо конечная десятичная дробь.

Если же представить процесс десятичного измерения длины отрезка в идеале (как и делают в математике), то возможны два исхода:

1) На некотором k-м шагу процесс измерения окончится. Тогда длина отрезка a выразится конечной десятичной дробью вида $n,n_1n_2...n_k$.

2) Описанный процесс измерения длины отрезка бесконечен. Отчет о нем будет представляться символом $n,n_1n_2...n_k...$, который называют **бесконечной десятичной дробью.**

Как убедиться в возможности такого исхода? Для этого достаточно произвести десятичное измерение длины такого отрезка, для которого известно, что его длина выражена, например, рациональным числом $5\frac{2}{3}$. Если бы оказалось, что в результате десятичного измерения длины такого отрезка получается конечная десятичная дробь, то это означало бы, что число $5\frac{2}{3}$ можно представить в виде конечной десятичной дроби, что невозможно: $5\frac{2}{3}=5{,}666...$.

Итак, в процессе десятичного измерения длин отрезков могут получаться бесконечные десятичные дроби. Но всегда ли эти дроби периодические? Ответ на этот вопрос отрицателен: существуют отрезки, длины которых нельзя выразить бесконечной десятичной периодической дробью (т. е. положительным рациональным числом) при выбранной единице длины.

Покажем, что если за единицу длины взять сторону квадрата, то длина диагонали этого квадрата не может быть выражена положительным рациональным числом.

Предположим противное, т. е. что длина диагонали a квадрата со стороной e (рис. 130) выражается несократимой дробью $\frac{m}{n}:a=\frac{m}{n}e$. По теореме Пифагора $e^2+e^2=\left(\frac{m}{n}e\right)^2$, или $2e^2=\left(\frac{m}{n}\right)^2e^2$, или $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$. Отсюда $m^2=2n^2$, т. е. m — четное число, например $m=2k$. Тогда $4k^2=2n^2$, или $2k^2=n^2$. Значит, n — четное число, например $n=2p$. Получаем, что и числитель, и знаменатель дроби $\frac{m}{n}$ — числа четные. Но это противоречит тому, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима.

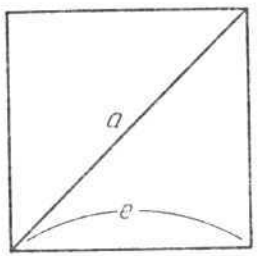


Рис. 130

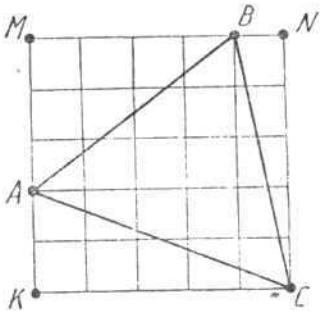


Рис. 131

Установленное противоречие доказывает существование отрезков, длины которых нельзя выразить положительным рациональным числом, или, другими словами, выразить в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Итак, при десятичном измерении длин отрезков могут получаться **бесконечные десятичные непериодические дроби**, они являются записью новых чисел — **положительных иррациональных чисел.** Так как часто понятия числа и его записи отождествляют, то говорят, что бесконечные десятичные непериодические дроби — это и есть иррациональные числа.

Мы пришли к понятию иррационального числа через процесс десятичного измерения длин отрезков. Но иррациональные числа можно получить и при извлечении корней из некоторых рациональных чисел. Так, $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{19}$ — это иррациональные числа. Иррациональными являются также $\lg 5$, $\sin 31°$, числа $\pi=3{,}14...$ и $e=2{,}7828...$.

Множество положительных иррациональных чисел обозначают символом I_+.

Упражнения

1. Опишите процесс десятичного измерения длины отрезка, если отчет о нем представляется дробью: 1) 3,46; 2) 3,(7), 3) 3,12311223... .

2. Докажите, что не существует положительного рационального числа, квадрат которого равен 3.

3. Является ли треугольник ABC, изображенный на рисунке 131, равносторонним?

4. Седьмая часть единицы длины укладывается в отрезке AB 13 раз. Конечной или бесконечной дробью выразится длина этого отрезка? Периодической или непериодической?

5. Докажите, что сумма рационального числа q и иррационального числа α всегда будет число иррациональное.

Указание. Доказательство ведите способом от противного.

6. Сравните значения выражений: 1) $6\sqrt{2}$ и $0{,}5\sqrt{162}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ и $6\sqrt{\frac{1}{2}}$.

7. Упростите выражения: 1) $10\sqrt{3}-\sqrt{48}-\sqrt{75}$; 2) $(5\sqrt{2}-\sqrt{18})\times\sqrt{2}$; 3) $(3-\sqrt{2})^2-\sqrt{32}$; 4) $(\sqrt{3}-2)^2+\sqrt{27}$.

90. Действия над положительными действительными числами

Объединение множества положительных рациональных чисел Q_+ и множества положительных иррациональных чисел I_+ называют **множеством положительных действительных чисел** и обозначают символом R_+.

Таким образом, $R_+ = Q_+ \cup I_+$. При помощи кругов Эйлера данные множества изображены на рисунке 132.

Любое положительное действительное число может быть представлено бесконечной десятичной дробью — периодической (если оно является рациональным) либо непериодической (если оно является иррациональным).

Как известно, действия над положительными рациональными числами сводятся, по существу, к действиям над натуральными числами. А как выполнять действия над действительными числами, представленными бесконечными десятичными дробями? Нельзя ли действия над ними свести к действиям над рациональными числами? Можно, но для этого надо ввести понятие приближенного значения действительного числа по недостатку и по избытку.



Рис. 132

Пусть $a = n,n_1n_2...n_k...$ — некоторое действительное число. Приближенным значением числа a по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^k}$ называется число $a_k = n,n_1n_2...n_k$ (т. е. приближенное значение числа a по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^k}$ получится, если взять целую часть числа и первые k цифр после запятой, а все остальные цифры отбросить). Приближенным значением числа $a = n,n_1,n_2...n_k...$ по избытку с точностью до $\frac{1}{10^k}$ называется число $a'_k = n,n_1n_2...n_k + \frac{1}{10^k}$ (т. е. приближенное значение числа a по избытку с точностью до $\frac{1}{10^k}$ получится, если в записи $n,n_1n_2...n_k$ последнюю цифру увеличить на 1).

Для любого действительного числа a справедливо неравенство $a_k \leqslant a < a'_k$.

Например, десятичным приближением числа $\sqrt{3} = 1{,}73205...$ по недостатку с точностью до $0{,}001\left(\frac{1}{10^3}\right)$ является число 1,732, а по избытку — число 1,733.

Видим, что десятичные приближения действительного числа являются конечными десятичными дробями. На этом и основываются, определяя действия над положительными действительными числами.

Пусть даны действительные числа a и b, a_k и b_k — их приближенные значения по недостатку, a'_k и b'_k — приближенные значения по избытку.

Определение. **Суммой положительных действительных чисел a и b называется такое число $a+b$, которое удовлетворяет следующему неравенству: $a_k + b_k \leqslant a+b < a'_k + b'_k$.**

Найдем, например, сумму $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ с точностью до 0,001. Возьмем десятичные приближения данных чисел с точностью до 0,0001:

$$1{,}4142 \leqslant \sqrt{2} < 1{,}4143,$$
$$1{,}7320 \leqslant \sqrt{3} < 1{,}7321.$$

Тогда $3{,}1462 \leqslant \sqrt{2}+\sqrt{3} < 3{,}1464$, а $\sqrt{2}+\sqrt{3} = 3{,}146...$. С точностью до 0,001 сумма $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ равна 3,146.

Определение. **Произведением положительных действительных чисел a и b называется число $a \cdot b$, которое удовлетворяет следующим условиям:**

$$a_k \cdot b_k \leqslant ab < a'_k \cdot b'_k.$$

Найдем, например, произведение $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ с точностью до 0,1. Возьмем десятичные приближения данных чисел с точностью до 0,01:

$$1{,}41 \leqslant \sqrt{2} < 1{,}42,$$
$$1{,}73 \leqslant \sqrt{3} < 1{,}74.$$

Тогда $2{,}4393 \leqslant \sqrt{2}\cdot\sqrt{3} < 2{,}4708$, а $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 2{,}4...$. С точностью до 0,1 произведение $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ равно 2,4.

Для любых положительных действительных чисел выполняются следующие равенства:

1) $a+b=b+a$;
2) $(a+b)+c=a+(b+c)$;
3) $a\cdot b=b\cdot a$;
4) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$;
5) $(a+b)\cdot c=ac+bc$.

Упражнения

1. Докажите, что числа 4,7 и 4,8 являются десятичными приближениями соответственно по недостатку и по избытку числа $\sqrt{23}$ с точностью до 0,1.

2. Проверьте, истинно ли неравенство: 1) $3{,}6 \leqslant 3\frac{5}{7} \leqslant 3{,}7$; 2) $7{,}26 \leqslant 7\frac{3}{11} \leqslant 7{,}27$.

3. Десятичное приближение $\sqrt{21}$, взятое из таблицы квадратных корней с точностью до 0,001, равно 4,583. Проверьте, как произведено округление: с недостатком или с избытком.

4. Архимед установил, что отношение длины окружности к ее диаметру больше, чем $3\frac{10}{71}$, и меньше, чем $3\frac{1}{7}$. Найдите десятичные приближения этих дробей с точностью до: а) 0,01; б) 0,001.

5. Известно, что числа $a=3{,}6272...$, $b=5{,}2814...$. Найдите три первых десятичных знака суммы $a+b$.

6. Известно, что $x=0{,}35...$, $y=0{,}82...$. Найдите первый десятичный знак произведения $x \cdot y$.

7. Проверьте вычисления: 1) $20{,}8+\frac{7}{11}=21{,}4(36)$; 2) $220-\frac{7}{11}=219{,}(36)$.

91. Отрицательные числа

Возьмем координатную прямую OX. Все точки, изображающие положительные действительные числа, располагаются справа от точки O. Например, точка A соответствует действительному числу 4, точка B — числу 5,5, точка C — числу $\sqrt{2}$ (рис. 133).

Отложим единичный отрезок от точки O 4 раза в направлении, противоположном заданному. Получим точку A', симметричную точке A относительно начала отсчета. Координату точки A' обозначим -4, т. е. $A'(-4)$. Аналогично координатой точки B', симметричной точке B (рис. 133), считают число $-5{,}5$, а координатой точки C', симметричной точке C на том же рисунке, считают число $-\sqrt{2}$. Числа 4 и -4, 5,5 и $-5{,}5$, $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ называют **противоположными.** Числа, расположенные на координатной прямой в заданном направлении, называют **положительными**, а числа, расположенные на координатной прямой в направлении, противоположном заданному,— **отрицательными**. Число 0 не считается ни положительным, ни отрицательным.

Объединение множества отрицательных действительных чисел

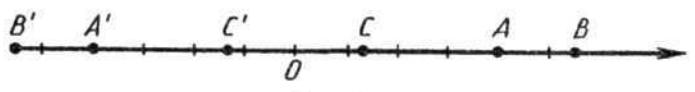


Рис. 133

с множеством положительных действительных чисел и нулем есть **множество действительных чисел.** Его обозначают буквой R.

Множество R действительных чисел и множество точек координатной прямой находятся во взаимно однозначном соответствии: каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой и каждая точка координатной прямой соответствует единственному действительному числу.

Расстояние от начала отсчета до точки, координатой которой является число x, называется **модулем** числа и обозначается $|x|$.

Таким образом, $|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x<0. \end{cases}$

Например, $|-7|=7$, $|5{,}5|=5{,}5$, $|0|=0$.

Действительные числа сравнивают, определяя отношения «меньше» и «больше» так: **число a меньше числа b $(a<b)$, если оно расположено левее на координатной прямой; число a больше числа b $(a>b)$, если оно расположено правее на координатной прямой.** Из этого определения вытекает, что любое положительное число больше нуля, а любое отрицательное число меньше нуля. Кроме того, исходя из определений «меньше» и «больше» можно получить утверждение: $a<b$ тогда и только тогда, когда разность $a-b$ есть отрицательное число; $a>b$ тогда и только тогда, когда разность $a-b$ есть положительное число.

Для любых заданных действительных чисел a и b истинно одно и только одно из положений: $a<b$, $a>b$, $a=b$.

Действия над действительными числами выполняются по следующим правилам.

Суммой двух действительных чисел называется число, которое удовлетворяет условиям:

1) сумма двух положительных чисел есть число положительное и находится по правилам, определенным в множестве положительных действительных чисел;

2) сумма двух отрицательных чисел есть число отрицательное; чтобы найти модуль суммы, надо сложить модули слагаемых;

3) сумма двух чисел, имеющих разные знаки, есть число, которое имеет тот же знак, что и слагаемое с большим модулем; чтобы найти модуль суммы, надо из большего модуля вычесть меньший.

Произведением двух действительных чисел называется число, которое удовлетворяет условиям:

1) произведение двух положительных чисел есть число положительное и находится по правилам, определенным в множестве положительных действительных чисел;

2) произведение двух отрицательных чисел есть число положительное; произведение двух чисел, имеющих разные знаки, есть число отрицательное; чтобы найти модуль произведения, надо перемножить модули этих чисел.

Вычитание и деление действительных чисел определяются как действия, обратные соответственно сложению и умножению. Вычи-

тание в множестве действительных чисел выполняется всегда, так же как и деление, за исключением случая деления на нуль.

Упражнения

1. Изобразите на луче (рис. 134) числа $a+3$ и $a-5$.



Рис. 134

2. Докажите или опровергните высказывания:

1) Всякое число, большее числа 35, положительно.
2) Всякое число, меньшее 19, положительно.
3) Существует положительное число, меньшее 19.
4) Всегда можно указать целое положительное число, меньшее любого положительного числа.
5) Любое число, меньшее какого-либо отрицательного числа, является числом отрицательным.
6) Всякое число, не большее нуля, есть число отрицательное.

3. При каких условиях предложение «Если модуль числа a больше модуля числа b, то число a больше числа b» является истинным высказыванием?

4. Где на координатной прямой лежит точка с координатой x, если:

1) $x=2$; 2) $|x-1|=2$; 3) $|x|\leqslant 5$; 4) $|x|>2$; 5) $|x-1|<3$?

5. Используя геометрическое понятие модуля, решите:

1) уравнение $|x-3|=2$;
2) неравенство $|x-2|<3$;
3) неравенство $|x-1|>3$.

Глава IV

УРАВНЕНИЯ. НЕРАВЕНСТВА. ФУНКЦИИ

§ 14. ЧИСЛОВЫЕ РАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА

92. Об алфавите математического языка

Изучая математику, мы пользуемся как предложениями русского языка, так и предложениями, образованными из математических знаков (символов), т. е. предложениями собственно математического языка. Так, $2x+3=5$, $2x+7>5x$ являются предложениями, записанными с помощью математических символов.

Но, как известно, любое предложение образуется из слов, а слова — из букв некоторого алфавита. Следовательно, должен существовать и алфавит математического языка. Чтобы составить о нем представление, вспомним, какие знаки встречались в символических записях, используемых в математике. Например, запись чисел в десятичной системе счисления осуществляется с помощью десяти цифр (знаков): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Для обозначения переменных, множеств и их элементов используются буквы латинского алфавита: a, b, c, ..., z, A, B, C, ..., Z. Для записи действий применяются знаки: $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\sqrt{}$, $\cap$, $\cup$ и др. Чтобы записать предложение, нужны знаки отношений (между числами, множествами, их элементами): $=$, $>$, $<$, $\parallel$, $\perp$, $\vdots$ и др. Кроме того, в символических записях встречаются скобки (круглые и фигурные), запятая.

Все перечисленные знаки входят в алфавит математического языка, языка искусственного, возникшего в связи с необходимостью в точных, сжатых и однозначно понимаемых формулировках математических законов, правил, доказательств.

Из знаков математического алфавита по определенным правилам конструируются слова и предложения. При этом слово в математике понимается так же как и в русском языке, т. е. это такая конечная последовательность (набор) букв алфавита этого языка, которая имеет смысл. Например, запись $7-:8+$ смысла не имеет, и, значит, словом ее назвать нельзя.

Следует заметить, что мы познакомились с формальным подходом к математическому языку. Исторически символика математики создавалась веками при участии многих выдающихся ученых. Так, считают, что обозначение неизвестных величин буквами использовал еще Диофант (III в.), широкое применение прописных букв латинского алфавита в алгебре началось с Виета (XVI в.). Строчные буквы этого алфавита ввел для обозначения Р. Декарт (XVII в.). Знак равенства ($=$) впервые появился в работах английского ученого Р. Рекорда (XVI в.), но стал он общеупотребительным только в XVIII веке. Знаки неравенства ($<$, $>$) появились в начале XVII столетия, ввел их английский математик Гариот. И хотя знаки «$=$», «$>$», «$<$» появились не так давно, сами понятия равенства и неравенства возникли в глубокой древности.

Упражнения

1. Установите, какие из следующих записей можно считать словами математического языка:

1) $2+3\cdot 4$;
2) $7+12-$;
3) $(17+3)\cdot 2a-18:2$;
4) $\sqrt{16}-12:4$;
5) $a^2-2ab\cdot 7$;
6) $\sqrt{16}-:ab\cdot 2c$.

2. Среди следующих записей укажите предложения:

1) $2<3$;
2) $x^2-3x+4=0$;
3) $5y\cdot y-3x+=$;
4) $(2a-7b)-8$;
5) $x\parallel y$;
6) $172:4$.

3. Образуйте из знаков математического алфавита два слова и два предложения.

4. Приведите примеры символических записей, встречающихся в начальном курсе математики, и объясните их смысл.

93. Числовые выражения и выражения с переменными

Как известно, записи $3+7$, $24:8$, $3\cdot2-4$, $(25+3)\cdot2-17$ называются **числовыми выражениями.** Они конструируются из чисел, знаков действий и скобок. Считают, что каждое число также является числовым выражением.

Число, полученное в результате последовательного выполнения действий, указанных в выражении, называется **значением числового выражения.**

Так, значение числового выражения $3\cdot2-4$ равно 2.

Существуют выражения, которые не имеют числового значения. Про такие выражения говорят, что они **не имеют смысла.** Например, выражение $8:(4-4)$ смысла не имеет, поскольку его значение найти нельзя: $4-4=0$, а деление на нуль невозможно. Выражение $\sqrt{-9}$ также не имеет числового значения в множестве действительных чисел, так как не существует действительного числа, квадрат которого был бы равен -9. Не имеет значения в множестве натуральных чисел и выражение $7-9$.

Рассмотрим запись $2a+3$. Она образована из знаков алфавита математического языка: цифр 2 и 3, знака действия сложения «$+$» и буквы a. Если вместо буквы a подставлять числа, то будут получаться различные числовые выражения:

при $a=3$ $2\cdot3+3$;
при $a=7$ $2\cdot7+3$;
при $a=-4$ $2\cdot(-4)+3$.

В записи $2a+3$ такая буква a называется **переменной**, а сама запись $2a+3$ — **выражением с переменной.**

Переменную можно обозначать любой буквой латинского алфавита. В начальной школе для обозначения переменной, кроме букв, используют также знак $\square$. Например, пишут $2\cdot\square+3$.

Таким образом, переменная — это знак (символ), который разрешается заменять числами.

Числа, которые разрешается подставлять вместо переменной в выражение, называются **значениями переменной**, а множество таких чисел — **областью определения данного выражения.**

Что значит «разрешается»?

Дело в том, что вместо переменной в выражении разрешается представлять такие ее значения, при которых получаются числовые выражения, имеющие смысл.

Рассмотрим несколько примеров.

1. В выражении $3-4y$ переменная y может принимать любые действительные значения, так как при любом значении y будет получаться числовое выражение, имеющее смысл. В этом случае

можно сказать, что областью определения выражения $3-4y$ является множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел.

2. Если в выражении $\frac{4}{x-3}$ вместо x подставить число 3, то получим числовое выражение, которое не имеет смысла. Но при всех других действительных значениях переменной x будем иметь числовые выражения, имеющие смысл. Говорят, что область определения выражения $\frac{4}{x-3}$ есть множество действительных чисел, кроме числа 3, т. е. множество $(-\infty, 3)\cup(3, +\infty)$.

3. Выражение $\sqrt{x-2}$ будет обращаться в числовое выражение, имеющее смысл, при тех действительных значениях x, которые удовлетворяют неравенству $x-2\geqslant0$, т. е. областью определения данного выражения будет множество $[2, +\infty)$.

В математике рассматривают выражения, содержащие одну переменную, две, три и т. д. Все выражения, которые были рассмотрены выше,— это выражения с одной переменной. Выражение $3x+7y$ содержит две переменные, запись $5x-(2y-7z)$ есть выражение с тремя переменными.

Подчеркнем еще раз, что числовые выражения образуются из чисел, знаков действий и скобок, а в выражениях с переменными появляются еще и буквы. Если провести аналогию с русским языком, то и числовые выражения и выражения с переменными — это слова, из которых можно образовывать математические предложения.

В начальных классах учащиеся первоначально знакомятся с записями вида $2+3$, $7-4$, называя их соответственно суммой и разностью. Затем появляются числовые выражения более сложной структуры, но термины «математическое выражение» и «значение выражения» появляются, когда учащиеся производят вычисления в пределах сотни. После знакомства с умножением и делением рассматриваются числовые выражения, содержащие знаки умножения и деления. Учащиеся находят значения числовых выражений, иногда записывают решение текстовой задачи в виде числового выражения, составляют по данным выражениям задачи. При выполнении таких заданий учащиеся неизбежно сталкиваются с выражениями, значения которых в множестве целых неотрицательных чисел найти нельзя. Например, про выражение $6-7$ они говорят, что его значение найти нельзя, так как нельзя из меньшего числа вычесть большее.

Работа с буквенными выражениями сводится к подстановке вместо букв их значений и вычислению значения получившегося числового выражения.

Упражнения

1. Среди следующих записей укажите числовые выражения:
1) $42:5$; 2) 3^2; 3) 27; 4) $32+-14\cdot2$; 5) $7\sqrt{16-3}$; 6) $\sqrt{\sqrt{2}}$;

7) $27-4=20+3$; 8) $13-5<7$.

2. Какие из ниже приведенных записей являются выражениями с переменными (переменной):

1) $\frac{b}{3}+8$; 2) $\frac{2,3+ac}{5}$; 3) $21-(4+y)$; 4) $0,49+2^3$; 5) $x+2y<7$;

6) $32:y+3$?

3. Вычислите значение числового выражения:

1) $((36:2-14)\cdot(42\cdot2-14)+20):2$;

2) $(72:12-(18-15)):(24:3-2\cdot4)$;

3) $(16,583:7,21+54,68\cdot853,2+28,82\cdot0,1):1,6-1,02$;

4) $\left(5,05:\frac{1}{40}-2,8\cdot\frac{5}{6}\right)\cdot3+16\cdot0,1875$;

5) $\left(1,75\frac{2}{5}+1,75:1\frac{1}{8}\right)\cdot1\frac{5}{7}:\left(\left(\frac{17}{40}-0,325\right):\frac{1}{5}\cdot0,4\right)$;

6) $(-2,09:1,1+4,5)\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)-4,32-3,68$.

4. Заполните таблицу:

Выражение с переменной	Значение переменной	Числовое выражение	Значение выражения
$\frac{a}{8}-\left(\frac{2}{a}\right)^2$	$a=4$		
$\frac{b-4}{2(b-3)}+\frac{2}{3}$	$b=6$		

5. Установите, при каких значениях переменной не имеет смысла выражение:

1) $\frac{64}{3+y}$; 2) $\frac{25}{7-b}$; 3) $\sqrt{a+3}$; 4) $\frac{8}{\sqrt{y-4}}$.

6. Известно, что выражение называется по своему последнему действию. Укажите порядок действий и по последнему действию напишите название каждого выражения:

Выражение	Название выражения
$(12\cdot5+3:(2+7))\cdot18$	
$(23-7\cdot6-4+15):(17-6)$	
$21+(35\cdot3:8-14:5)$	
$19-8:4+5$	

7. Найдите рациональным способом значение выражения:

$\frac{2a-2b}{ax-bx+ay-by}$, если $a=3,2$, $b=1,7$, $x=2,7$, $y=-0,7$.

8. Найдите значение выражения

$(3b-3a)^2\cdot\frac{1}{3a^2-3b^2}$ при $a=7$ и $b=3$.

9. Запишите решение задачи в виде выражения, а затем найдите его значение:

1) На турбазу прибыли в один день 150 туристов, на другой день 170. Чтобы совершить поход, 200 туристов разбились на группы, по 20 человек в каждой, а остальные по 15 человек в группе. Сколько получилось групп?

2) В мастерской за 5 дней сшили 2000 школьных фартуков. Сколько фартуков сошьют в мастерской за 8 дней, если в день будут шить на 50 фартуков больше?

10. Приведите по 2 примера заданий из учебников математики для начальных классов, в которых учащимся предлагается:

1) вычислить значение числового выражения;

2) найти значение выражения, при заданном значении входящих в него букв;

3) составить задачу по данному выражению.

Выполните эти задания.

94. Числовые равенства и неравенства

Пусть a и b — два числовых выражения. Соединим их знаком равенства. Получим предложение $a=b$, которое называют **числовым равенством.**

Например, возьмем два числовых выражения $3+2$ и $6-1$ и соединим их знаком равенства. Получим числовое равенство $3+2=6-1$. Это предложение истинное. Если же соединить знаком равенства выражения $3+2$ и $7-3$, то получим числовое равенство $3+2=7-3$, которое ложно. Таким образом, с логической точки зрения числовое равенство — это высказывание, истинное или ложное.

Числовое равенство истинно, если значения числовых выражений, стоящих в левой и правой частях равенства, совпадают. Напомним некоторые свойства истинных числовых равенств.

1) Если к обеим частям истинного числового равенства $a=b$ прибавить одно и то же числовое выражение c, имеющее смысл, то получим также истинное числовое равенство $a+c=b+c$.

$$a=b \Rightarrow a+c=b+c.$$

2) Если обе части истинного числового равенства $a=b$ умножить на одно и то же числовое выражение c, имеющее смысл, то получим также истинное числовое равенство $ac=bc$.

$$a=b \Rightarrow ac=bc.$$

Пусть a и b — два числовых выражения. Соединим их знаком «$>$» (или $<$). Получим предложение $a>b$ (или $a<b$), которое называют **числовым неравенством.**

Например, если соединить выражения $6+2$ и $13-7$ знаком «$>$», то получим числовое неравенство $6+2>13-7$. Это предложение истинное. Если соединить те же выражения знаком «$<$», то получим ложное числовое неравенство $6+2<13-7$. Таким образом, с логической точки зрения числовое неравенство — это высказывание, истинное или ложное.

Напомним некоторые свойства истинных числовых неравенств:

1) Если к обеим частям истинного числового неравенства $a>b$ прибавить одно и то же числовое выражение c, имеющее смысл, то получим также истинное числовое неравенство $a+c>b+c$.

2) Если обе части истинного числового неравенства $a>b$ умножить на одно и то же числовое выражение c, имеющее смысл и принимающее положительное значение, то получим также истинное числовое неравенство $ac>bc$.

3) Если обе части истинного числового неравенства $a>b$ умножить на одно и то же числовое выражение c, имеющее смысл и принимающее отрицательное значение, то, чтобы получить истинное числовое неравенство, необходимо знак неравенства поменять на противоположный, т. е. получить неравенство $ac<bc$.

Упражнения

1. Установите, какие из следующих числовых равенств и неравенств истинны:

1) $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$;

2) $3^3+4^3+5^3=6^3$;

3) $\left(\frac{1}{14}-\frac{2}{7}\right):(-3)-6\frac{1}{13}:\left(-6\frac{1}{13}\right)>\left(7-8\frac{4}{5}\right)\cdot 2\frac{7}{9}-15:\left(\frac{1}{8}-\right.$

$\left.-\frac{3}{4}\right)$;

4) $1{,}0905:0{,}025-6{,}84\cdot 3{,}07+2{,}38:100<4{,}8:(0{,}04\cdot 0{,}006)$.

2. Сформулируйте условия, при которых неравенство $a\geqslant b$: 1) истинно; 2) ложно.

3. Дано неравенство $5>3$. Умножьте обе его части на 7; 0,1; 2,6; $\frac{3}{4}$. Можно ли на основании полученных результатов утверждать, что для любого положительного числа a неравенство $5a>3a$ истинно?

4. В одной корзине было 68 яблок, а в другой корзине — на 9 яблок меньше. В каждую корзину положили еще по 10 яблок. В какой корзине яблок больше и на сколько?

5. Известно, что $x>y$ — истинное неравенство. Будут ли истинными следующие неравенства:

1) $2x>2y$; 3) $2x-7<2y-7$;

2) $-\frac{x}{3}<-\frac{y}{3}$; 4) $-2x-7<-2y-7$?

6. Известно, что $a<b$ — истинное неравенство. Поставьте вместо * знак «$>$» либо «$<$» так, чтобы получилось истинное неравенство:

а) $-3{,}7a*-3{,}7b$; г) $-\frac{a}{3}*-\frac{b}{3}$;

б) $0{,}12a*0{,}12b$; д) $-2(a+5)*-2(b+5)$;

в) $\frac{a}{7}*\frac{b}{7}$; е) $\frac{2}{7}(a-1)*\frac{2}{7}(b-1)$.

7. Как трактуются в начальном курсе математики понятия числового равенства и числового неравенства, если учащимся предлагаются задания:

1) Запиши два верных равенства и два верных неравенства, используя выражения: $9\cdot 3$, $30-6$, $3\cdot 9$, $30-3$.

2) Расставь скобки так, чтобы равенства были верными:

$$4+2\cdot 3=18,\ 31-10-3=24,\ 54-12+8=34.$$

3) Поставь знаки действия так, чтобы получились верные равенства: $3*6*2=9$, $9*3*6=18$.

95. Тождественные преобразования выражений

Возьмем два выражения с переменной: $5(x+2)$ и $5x+10$. Областью определения данных выражений является множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел. Сравним значения числовых выражений, которые получаются при замене переменной x ее значениями из $\boldsymbol{R}$. Видим, что при значениях x, равных 0, -2, -4, соответственные значения данных выражений равны.

x	$5(x+2)$	$5x+10$
0	10	10
-2	0	0
-4	-10	-10

Можно показать в общем виде, что соответственные значения данных выражений будут равны при любых значениях x из множества $\boldsymbol{R}$. Действительно, выражение $5x+10$ можно получить, раскрыв скобки в выражении $5(x+2)$, что возможно на основании распределительного закона умножения относительно сложения, справедливого для любых действительных чисел.

Говорят, что выражения $5(x+2)$ и $5x+10$ тождественно равны на множестве действительных чисел.

Дадим определение тождественно равных выражений.

О п р е д е л е н и е. **Два выражения называются тождественно равными, если при любых значениях переменных из области определения выражений их соответственные значения равны.**

Равенство, верное при любых значениях переменных, называется **тождеством.** Тождествами считают и верные числовые равенства. Например, тождествами являются все ранее рассмотренные законы сложения и умножения действительных чисел,

правила вычитания числа из суммы, суммы из числа, правило деления суммы на число и др. Тождествами являются правила действий с нулем и единицей: $a+0=0+a=a$, $a\cdot 0=0\cdot a=0$, $a\cdot 1=1\cdot a=a$, $a:1=a$. Опираясь на эти и другие общие правила, на практике устанавливают тождественность выражений, понимая тождественные преобразования данного выражения как последовательный переход от одного выражения к другому, тождественно равному ему.

Приведем примеры выполнения тождественных преобразований.

1. Разложим на множители выражение $ax-bx+ab-b^2$.

Сгруппируем члены данного выражения по два (первый со вторым, третий с четвертым) — это тождественное преобразование возможно на основании сочетательного закона сложения действительных чисел: $ax-bx+ab-b^2=(ax-bx)+(ab-b^2)$.

Вынесем в полученном выражении из каждой скобки общий множитель — это тождественное преобразование возможно на основании распределительного закона умножения относительно сложения:

$$(ax-bx)+(ab-b^2)=x(a-b)+b(a-b).$$

В полученном выражении слагаемые имеют общий множитель, вынесем его за скобки — это тождественное преобразование:

$$x(a-b)+b(a-b)=(a-b)(x+b).$$

Итак, $ax-bx+ab-b^2=(a-b)(x+b)$.

2. Упростим выражение $\frac{1-2x}{2x-3}-\frac{1-5x}{3-2x}$.

Чтобы сделать одинаковыми знаменатели дробей, умножим числитель и знаменатель второй дроби на -1 — это тождественное преобразование (если умножить числитель и знаменатель дроби на одно и то же число, получим дробь, равную данной):

$$\frac{1-2x}{2x-3}-\frac{1-5x}{3-2x}=\frac{1-2x}{2x-3}-\frac{5x-1}{2x-3}.$$

Воспользуемся далее правилом вычитания дробей с одинаковыми знаменателями — это тождественное преобразование:

$$\frac{1-2x}{2x-3}-\frac{5x-1}{2x-3}=\frac{1-2x-5x+1}{2x-3}.$$

Приведем подобные члены в числителе получившейся дроби:

$$\frac{1-2x-5x+1}{2x-3}=\frac{2-7x}{2x-3}.$$

Итак, $\frac{1-2x}{2x-3}-\frac{1-5x}{3-2x}=\frac{2-7x}{2x-3}$.

В начальном курсе математики выполняют тождественные преобразования только числовых выражений. Их теоретической

основой являются переместительное свойство сложения, умножения и различные правила: правила прибавления суммы к числу, числа к сумме, вычитания числа из суммы и др. Например, значение выражения $4\cdot(5+10)$ может быть найдено так: $4\cdot(5+10)=4\cdot 5+4\cdot 10=20+40=60$, причем переход от данного выражения к тождественно равному ему выражению $4\cdot 5+4\cdot 10$ осуществляется на основе правила умножения числа на сумму (а по существу, на основе распределительного закона умножения относительно сложения), а далее используются правила умножения и сложения натуральных чисел.

Упражнения

1. Выясните, являются ли выражения x^4 и $7x^2-6x$ тождественно равными на множестве:

1) $\{-3, 0, 1, 2, -1\}$; 2) $\{-3, 1, 2\}$.

2. Является ли равенство $3(4y+2)=6+12y$ тождеством на множестве:

1) $\{-1, 2, 3\}$; 2) R?

3. Какие из следующих равенств являются тождествами на множестве действительных чисел:

1) $3p+5m=5m+3p$; 3) $x-y=y-x$;

2) $b\cdot 7=7\cdot b$; 4) $m(3+t)=3m+mt$?

4. Обоснуйте каждый шаг в преобразованиях следующих выражений:

1) $5(1-2x)+10x=5-10x+10x=5$;

2) $(a+1)(a+3)=a^2+a+3a+3=a^2+4a+3=a(a+4)+3$.

5. Упростите выражение путем тождественных преобразований:

1) $3(x+4)-3x$;

2) $6(2ab-3)+2a(6b-5)$;

3) $\frac{x^2-5x}{x+2}:\frac{x^2-25}{x^2-4}$;

4) $\frac{3-2m}{m-7n}+\frac{4-2m}{m^2-49n^2}$;

5) $\frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{y^2-x^2}-\frac{x}{x+y}\right)$.

6. Найдите наиболее рациональным способом значение выражения:

1) $\frac{518^2-482^2}{360}$;

2) $\frac{87^2-39^2}{19^2-37^2}$;

3) $(\sqrt{3}+\sqrt{75})^2$;

4) $(\sqrt{5}+\sqrt{45})^2$.

7. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $(n+7)^2-n^2$ делится на 7.

8. Докажите, что выражение $a^2-12a+37$ при любом действительном значении a принимает положительное значение.

9. Вычислите рациональным способом значение выражения $n^2-77n+122$ при $n=78$.

10. Запишите правила, на основе которых выполняются тождественные преобразования числовых выражений в начальных классах, и приведите примеры применения этих правил.

11. Учащиеся начальных классов выполняют задание:
«В один столбик выпиши примеры с ответом 8, в другой — с ответом 12, в третий столбик — с ответом 36: $6\cdot2$, $9\cdot4$, $24:3$, $45-9$, $2\cdot4$, $20-8$, $32:4$, $6\cdot6$, $4\cdot3$, $60-24$, $48:8$».

1) Как называются выражения, оказавшиеся в одном столбике?

2) Можно ли в этой ситуации говорить о разбиении заданного множества числовых выражений на классы? Каким отношением оказываются связаны выражения каждого столбика?

§ 15. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

96. Уравнения с одной переменной

Возьмем два выражения с переменной: $4x$ и $5x+2$. Соединив их знаком равенства, получим предложение $4x=5x+2$. Оно содержит переменную и при подстановке значений переменной обращается в высказывание. Например, при $x=1$ предложение $4x=5x+2$ обращается в ложное числовое равенство $4\cdot1=5\cdot1+2$, а при $x=-2$ — в истинное $4\cdot(-2)=5\cdot(-2)+2$. Поэтому предложение $4x=5x+2$ есть высказывательная форма. Ее называют равенством с переменной или **уравнением с одной переменной.**

В общем виде понятие уравнения с одной переменной можно определить так:

Определение. **Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — два выражения с переменной x и областью определения X. Тогда высказывательная форма вида $f(x)=g(x)$ называется уравнением с одной переменной.**

Значение переменной x из множества X, при котором уравнение обращается в истинное числовое равенство, называется его **решением (или корнем). Найти множество решений данного уравнения — значит решить это уравнение.**

Приведем несколько примеров уравнений с одной переменной.

1) $4x=5x+2$, $x\in\boldsymbol{R}$. Это уравнение обращается в истинное числовое равенство только при $x=-2$. Значит, его множество решений есть $\{-2\}$.

2) $(x-1)(x+2)=0$, $x\in\boldsymbol{R}$. Это уравнение с одной переменной обращается в истинное числовое равенство при $x=1$ и при $x=-2$. Следовательно, множество решений данного уравнения таково: $\{-2;\ 1\}$.

3) $(3x+1)\cdot2=6x+2$, $x\in\boldsymbol{R}$. Если раскрыть скобки в выражении, стоящем в левой части, то данное уравнение приобретает вид $6x+2=6x+2$. Полученная запись означает, что такое уравнение обращается в истинное высказывание при любом действительном значении переменной x. В этом случае говорят, что множество решений данного уравнения есть множество действительных чисел.

4) $(3x+1)\cdot2=6x+1$, $x\in\boldsymbol{R}$. Легко убедиться в том, что данное уравнение не обращается в истинное числовое равенство ни при одном действительном значении x: после преобразований в левой части имеем $6x+2$, а в правой $6x+1$, но $1\neq2$. В этом случае говорят, что данное уравнение не имеет решения или что множество его решений пусто.

В начальном курсе математики рассматриваются простейшие уравнения вида $x+a=b$, $a-x=b$, $x-a=b$, $x\cdot a=b$, $x:a=b$ и др., где a, b — целые неотрицательные числа, x — переменная. Понятия уравнения и его решения определяются неявно, через контекст, и «в ходе решения таких уравнений у детей должно быть постепенно сформировано понимание уравнения как равенства, содержащего неизвестное число, обозначенное буквой. Они должны понять, что всякий раз, как мы встречаемся с уравнением, задача заключается в том, чтобы найти то значение неизвестного числа, при котором равенство будет верным»[1].

Упражнения

1. Проверьте, является ли -4 корнем уравнения $x-0{,}5(x-12)=13-0{,}25x$, если оно задано на множестве действительных чисел.

2. Уравнение $2x^4+4x^2-6=0$ рассматривается на множестве натуральных чисел. Объясните, почему $x=1$ является корнем данного уравнения, а $x=2$ и $x=-1$ не являются его корнями.

3. Вместо многоточия вставьте либо «необходимо», либо «достаточно», либо «необходимо и достаточно» так, чтобы получилось истинное высказывание:

1) Для того чтобы a было корнем уравнения $f(x)=g(x)$, ..., чтобы a принадлежало области определения уравнения.

2) Для того чтобы a было корнем уравнения $f(x)=g(x)$, ..., чтобы при подстановке a вместо x уравнение обращалось в истинное числовое равенство.

3) Для того чтобы a было корнем уравнения $f(x)=g(x)$, ..., чтобы a принадлежало области определения и при подстановке a вместо x уравнение обращалось в истинное числовое равенство.

4. Истинны ли следующие высказывания:

1) Для того чтобы произведение $(x-3)(x+5)(x-1)$ было равно нулю, необходимо, чтобы $x=3$.

2) Для того чтобы произведение $(x-3)(x+5)(x-1)$ было равно нулю, достаточно, чтобы $x=1$.

[1] Моро М. И., Пышкало А. М. Методика обучения математике в 1—3 классах.— М., 1978.— С. 98.

5. Сформулируйте условия, при которых:
1) число 3 является корнем уравнения $f(x)\cdot g(x)=0$;
2) число 7 не является корнем уравнения $f(x)\cdot g(x)=0$;
3) число 2 является корнем уравнения $\frac{f(x)\cdot g(x)}{h(x)}=0$.

6. Приведите различные виды уравнений, решаемых в начальных классах.

97. Равносильность уравнений

Чтобы решить данное уравнение, его, как правило, преобразовывают, заменяя последовательно другими, более простыми. Этот процесс замены продолжают до тех пор, пока не получат уравнение, решения которого можно найти известным способом. Но чтобы эти решения были решениями заданного уравнения, необходимо, чтобы в процессе преобразований получались уравнения, множества корней которых совпадают. Такие уравнения называют **равносильными.**

Определение. **Два уравнения называются равносильными, если их** множества решений равны.

Например, уравнения $(x+1)^2=9$ и $(x-2)(x+4)=0$ равносильны на множестве действительных чисел, так как множество решений первого уравнения $\{-4, 2\}$ и множество решений второго уравнения $\{2, -4\}$ равны.

Выясним теперь, какие преобразования позволяют получать уравнения, равносильные исходному. Эти преобразования нашли отражение в следующих теоремах.

Теорема 1. ***Пусть уравнение $f(x)=g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ — выражение, определенное на том же множестве. Тогда уравнение $f(x)=g(x)$ (1) и $f(x)+h(x)=g(x)+h(x)$ (2) равносильны на множестве X.***

Эту теорему можно сформулировать иначе: если к обеим частям уравнения с областью определения X прибавить одно и то же выражение с переменной, определенное на том же множестве X, получим новое уравнение, равносильное данному.

Доказательство. Обозначим через T_1 множество решений уравнения (1), а через T_2 множество решений уравнения (2). Тогда уравнения (1) и (2) будут равносильны, если $T_1=T_2$. Но чтобы убедиться в этом, необходимо показать, что любой корень из T_1 является корнем уравнения (2) и, наоборот, любой корень из T_2 является корнем уравнения (1).

Пусть число a — корень уравнения (1). Тогда $a\in T_1$ и при подстановке в уравнение (1) обращает его в истинное числовое равенство $f(a)=g(a)$, а выражение $h(x)$ обращает в числовое выражение $h(a)$. Прибавим к обеим частям истинного равенства $f(a)=g(a)$ числовое выражение $h(a)$. Получим согласно свойства истинных числовых равенств истинное числовое равенство

$$f(a)+h(a)=g(a)+h(a).$$

Но это равенство говорит о том, что число a является также и корнем уравнения (2).

Итак, доказано, что каждый корень уравнения (1) является корнем и уравнения (2), т. е. $T_1\subset T_2$.

Пусть теперь b — корень уравнения (2). Тогда $b\in T_2$ и при подстановке в уравнение обращает его в истинное числовое равенство $f(b)+h(b)=g(b)+h(b)$.

Прибавим к обеим частям этого равенства числовое выражение $-h(b)$. Получим истинное числовое равенство $f(b)=g(b)$, которое говорит о том, что число b — корень уравнения (1).

Итак, доказано, что каждый корень уравнения (2) является и корнем уравнения (1), т. е. $T_2\subset T_1$.

Так как $T_1\subset T_2$ и $T_2\subset T_1$, то по определению равных множеств $T_1=T_2$, а значит, уравнения (1) и (2) равносильны на множестве X.

При решении уравнений чаще используется не сама данная теорема, а следствия из нее:

1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.

2. Если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части уравнения в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. ***Пусть уравнение $f(x)=g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ — выражение, определенное на том же множестве и не обращающееся в нуль ни при каких значениях x из множества X. Тогда уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$ равносильны на множестве X.***

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Из теоремы 2 вытекает следствие, которое часто используется при решении уравнений:

Если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное исходному.

Решим уравнение $1-\frac{x}{3}=\frac{x}{6}$, $x\in R$, и выясним, какие теоретические положения при этом были использованы.

Ход решения	Используемые теоретические положения
1. Приведем выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения к общему знаменателю: $\frac{6-2x}{6}=\frac{x}{6}$.	Выполнили тождественное преобразование выражения в левой части уравнения, получили уравнение, равносильное исходному.

2. Отбросим общий знаменатель: $6-2x=x$.	Умножили на 6 обе части уравнения (теорема 2), получили уравнение, равносильное предыдущему и, значит, исходному.
3. Выражение $-2x$ переносим в правую часть уравнения: $6=x+2x$.	Воспользовались следствием из теоремы 1 (или согласно теореме 1 прибавили к обеим частям выражение $2x$, определенное для всех действительных чисел), получили уравнение, равносильное предыдущему и, значит, данному.
4. Привели подобные члены в правой части уравнения: $6=3x$.	Выполнили тождественное преобразование, получили уравнение, равносильное предыдущему и, значит, данному.
5. Разделили обе части уравнения на 3: $x=2$.	Воспользовались следствием из теоремы 2 (или согласно теореме 2 умножили обе части уравнения на $\frac{1}{3}$), получили уравнение, равносильное предыдущему и, значит, исходному.

Таким образом, множество решений данного уравнения состоит из одного числа 2, т. е. $\{2\}$.

Возьмем теперь уравнение $x(x-1)=2x$, $x\in R$. Иногда учащиеся решают его так: делят обе части на x, получают уравнение $x-1=2$, откуда находят, что $x=3$, и заключают: $\{3\}$ — множество решений данного уравнения.

Но верно ли решено данное уравнение? Найдены ли все такие действительные значения x, которые обращают уравнение $x(x-1)=2x$ в истинное числовое равенство?

Нетрудно видеть, что при $x=0$ данное уравнение обращается в истинное числовое равенство $0\cdot(0-1)=2\cdot 0$. Значит, 0 — корень данного уравнения. Почему же произошла потеря этого корня?

Дело в том, что уравнение $x-1=2$ не равносильно уравнению $2(x-1)=2x$ на множестве действительных чисел, так как получено из последнего умножением на выражение $\frac{1}{x}$, которое определено не для всех действительных чисел (в частности, при $x=0$ оно не имеет смысла), т. е. нами не выполнено условие теоремы 2, что и привело к потере корня.

Как правильно решить уравнение $x(x-1)=2x$? Рассмотрим один из возможных вариантов решения.

Ход решения	Используемые теоретические положения
1. Перенесем выражение $2x$ из правой части в левую: $x(x-1)-2x=0$.	Воспользовались следствием из теоремы 1, получили уравнение, равносильное данному.
2. Вынесем в левой части уравнения за скобки x и приведем подобные члены: $x(x-3)=0$.	Выполнили тождественные преобразования, они не нарушили равносильности уравнения.
3. Произведение двух множителей равно нулю в том и только в том случае, когда хотя бы один из них равен нулю, поэтому $x=0$ или $x-3=0$.	Воспользовались условием равенства нулю произведения нескольких множителей, получили совокупность уравнений, равносильных исходному.
4. Перенеся число 3 в правую часть второго уравнения, получаем: $x=0$ или $x=3$.	Воспользовались следствием из теоремы 1, получили уравнение, равносильное уравнению $x-3=0$.

Таким образом, множество решений данного уравнения состоит из двух чисел 0 и 3, т. е. имеет вид $\{0, 3\}$.

Заметим, что невыполнение условий теорем 1 и 2 может привести не только к потере корней уравнения, но и к появлению так называемых посторонних корней.

Какие корни считают посторонними?

Пусть даны два уравнения: $f_1(x)=g_1(x)$ (1) и $f_2(x)=g_2(x)$ (2). Если известно, что все корни уравнения (1) являются корнями уравнения (2), то про уравнение (2) можно сказать, что оно следует из уравнения (1) или что уравнение (2) есть следствие уравнения (1). Если же уравнение (2) имеет корни, не удовлетворяющие уравнению (1), то они и будут посторонними для уравнения (1). Например, решая уравнение $\frac{5x-15}{(x+2)(x-3)}=0$, мы освобождаемся от знаменателя, умножив обе части уравнения на $(x+2)(x-3)$, и получаем $5x-15=0$, откуда $x=3$. Но при $x=3$ знаменатель дроби $\frac{5x-15}{(x+2)(x-3)}$ обращается в нуль, и поэтому $x=3$ не может быть корнем исходного уравнения, т. е. $x=3$ оказывается для него посторонним корнем.

Вообще если при решении уравнения его заменяют следствием (а не равносильным уравнением), то надо найти все корни уравнения-следствия, а затем их проверить, подставив в исходное уравнение. Посторонние корни отбрасывают.

Следует заметить, что приобретение посторонних корней менее «опасное» явление, чем их потеря. Поэтому при решении уравнений необходимо в первую очередь строго следить за правильным применением теорем о равносильности.

В начальном курсе математики теоретической основой решения уравнений является взаимосвязь между компонентами и результатами действий. Например, решение уравнения $(x \cdot 9) : 24 = 3$ обосновывается следующим образом. Так как неизвестное находится в делимом, то, чтобы найти делимое, надо делитель умножить на частное: $x \cdot 9 = 24 \cdot 3$, или $x \cdot 9 = 72$. Чтобы найти неизвестный множитель, надо произведение разделить на известный множитель: $x = 72 : 9$, или $x = 8$. Следовательно, решением данного уравнения является число 8.

Упражнения

1. Установите, какие из следующих пар уравнений равносильны на множестве действительных чисел:

1) $3 + 7x = -4$ и $2(3 + 7x) = -8$;
2) $3 + 7x = -4$ и $6 + 7x = -1$;
3) $3 + 7x = -4$ и $x + 2 = 0$.

2. Сформулируйте свойства отношения равносильности уравнений. Какие из них используются в процессе решения уравнений?

3. Учащийся решил уравнение $5x + 15 = 3x + 9$ следующим образом: $5x + 15 = 3x + 9$; $5(x + 3) = 3(x + 3)$; $5 = 3$ — и сказал, что это уравнение корней не имеет, так как решение его приводит к ложному числовому равенству. Прав ли учащийся?

4. Решите уравнение $\frac{2}{2-x} - \frac{1}{2} = \frac{4}{(2-x)x}$ и установите, какое его преобразование приводит к появлению постороннего корня $x = 2$.

5. Решите уравнения (все они определены на множестве действительных чисел) и объясните, какие теоретические положения были при этом использованы:

1) $\frac{7x+4}{2} - x = \frac{3x-5}{2}$; 2) $x - \frac{3x-2}{5} = 3 - \frac{2x-5}{3}$;

3) $(2-x)^2 - x(x + 1{,}5) = 4$.

6. Решите уравнения, используя взаимосвязь между компонентами и результатами действий:

1) $(x + 70) \cdot 4 = 328$; 3) $(85 \cdot x + 765) : 170 = 98$;
2) $560 : (x + 9) = 56$; 4) $(x - 13\,581) : 709 = 36$.

7. Решите уравнение $((x + 2) \cdot 81 - 3530) \cdot 21 = 714$, используя:

1) теоремы о равносильности уравнений и правила тождественных преобразований;

2) взаимосвязь между компонентами и результатами действий. Сравните способы записи решения.

8. Решите уравнение различными способами:

1) $(x-1)^2 + 3(x-1) = 0$; 2) $(x+1)(x-2) + (x-2)(x+4) = 6(2x+5)$.

9. При каких значениях x выражения $2x + 3(x + 2)$ и $\frac{2}{3}(8x - 3)$ имеют равные значения?

10. Решите задачи алгебраическим и арифметическим способами:

1) На первой полке на 16 книг больше, чем на второй. Если с каждой полки снять по 3 книги, то на первой полке книг будет в полтора раза больше, чем на второй. Сколько книг на каждой полке?

2) В двух пачках всего 30 тетрадей. Если бы из первой пачки переложили во вторую 2 тетради, то в первой пачке стало бы вдвое больше тетрадей, чем во второй. Сколько тетрадей было в каждой пачке?

3) Весь путь от турбазы до пионерлагеря, равный 16 км, велосипедист проехал за 1 ч 10 мин. Первые 40 мин этого времени он ехал с одной скоростью, а остальное время — со скоростью, на 3 км/ч меньшей. Найдите скорость велосипедиста на первом участке пути.

98. Неравенства с одной переменной. Равносильность неравенств

Предложения вида $2x + 7 > 10 - x$, $x^2 + 7x < 2$, $(x + 2)(2x - 3) > 0$ называют **неравенствами с одной переменной.**

Определение. **Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — два выражения с переменной x и областью определения X. Тогда неравенство вида $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$ называется неравенством с одной переменной.**

Значение переменной x из множества X, при котором неравенство обращается в истинное числовое неравенство, называется его **решением. Найти множество решений данного неравенства — значит решить это неравенство.**

В школьном курсе математики рассматриваются различные неравенства с одной переменной. Нас будут интересовать в основном только неравенства первой степени. В основе решения таких неравенств, так же как решения уравнений, лежит понятие равносильности и теоремы о равносильности неравенств.

Определение. **Два неравенства называются равносильными, если их множества решений равны.**

Например, неравенства $2x + 7 > 10$ и $2x > 3$ равносильны, так как их множества решений равны и представляют собой промежуток $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Теоремы о равносильности неравенств и следствия из них по своей сути похожи на соответствующие теоремы о равносиль-

ности уравнений, а доказательство их проводится аналогично доказательству теоремы 1 о равносильности уравнений.

Теорема 3. ***Пусть неравенство $f(x)>g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ — выражение, определенное на том же множестве. Тогда неравенства $f(x)>g(x)$ и $f(x)+h(x)>f(x)+h(x)$ равносильны на множестве X.***

Из этой теоремы вытекают следствия, которые часто используются при решении неравенств:

1) Если к обеим частям неравенства $f(x)>g(x)$ прибавить одно и то же действительное число d, то получим неравенство $f(x)+d>g(x)+d$, равносильное исходному.

2) Если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 4. ***Пусть неравенство $f(x)>g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ — выражение, определенное на том же множестве, и для всех x из множества X $h(x)>0$. Тогда неравенства $f(x)>g(x)$ и $f(x)\cdot h(x)>g(x)\cdot h(x)$ равносильны на множестве X.***

Из этой теоремы вытекает следствие: *если обе части неравенства $f(x)>g(x)$ умножить на одно и то же положительное действительное число d, то получим неравенство $f(x)\cdot d>g(x)\cdot d$, равносильное исходному.*

Теорема 5. ***Пусть неравенство $f(x)>g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ — выражение, определенное на том же множестве, и для всех x из множества X $h(x)<0$. Тогда неравенства $f(x)>g(x)$ и $f(x)\cdot h(x)<g(x)\cdot h(x)$ равносильны на множестве X.***

Из этой теоремы вытекает следствие:

Если обе части неравенства $f(x)>g(x)$ умножить на одно и то же отрицательное действительное число d и знак неравенства поменять на противоположный, то получим неравенство $f(x)\cdot d<g(x)\cdot d$, равносильное данному.

Решим неравенство $5x-5<2x-16$, $x\in R$, и выясним, какие теоретические положения были при этом использованы.

Ход решения	Используемые теоретические положения
1. Перенесем выражение $2x$ в левую часть, а число -5 в правую: $5x-2x<16+5$.	Воспользовались следствием 2 из теоремы 3, получили неравенство, равносильное исходному.
2. Приведем подобные члены в левой и правой частях неравенства: $3x<21$.	Выполнили тождественные преобразования выражений в левой и правой частях неравенства, они не нарушили равносильности неравенств.
3. Разделим обе части неравенства на 3: $x<7$.	Воспользовались следствием из теоремы 4, получили неравенство, равносильное исходному.

Решением неравенства $x<7$ является промежуток $(-\infty, 7)$. Таким образом, множеством решений неравенства $5x-5<2x+16$ является множество чисел $(-\infty, 7)$ (рис. 135).

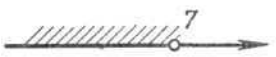


Рис. 135

Решим теперь неравенство $-12-7x<3x+8$, $x\in R$.

Ход решения	Используемые теоретические положения
1. Перенесем выражение $3x$ в левую часть, а -12 в правую: $-7x-3x<8+12$.	Воспользовались следствием 2 из теоремы 3, получили неравенство, равносильное исходному.
2. Приведем подобные члены в левой и правой частях: $-10x<20$.	Выполнили тождественные преобразования выражений в левой и правой частях неравенства, получили неравенство, равносильное исходному.
3. Разделим обе части неравенства на -10: $x>-2$.	Воспользовались следствием из теоремы 5, получили неравенство, равносильное исходному.

Решением неравенства $x>-2$ является промежуток $(-2, \infty)$. Таким образом, множеством решений неравенства $-12-7x<3x+8$ является множество чисел $(-2, \infty)$ (рис. 136).



Рис. 136

Упражнения

1. Является ли число 3 решением неравенства $6(2x+7)<15(x+2)$, определенного на множестве действительных чисел? А число 4,25?

2. Равносильны ли на множестве действительных чисел следующие пары неравенств:

1) $-17x<-51$ и $x>3$;

2) $\frac{3x-1}{4}>0$ и $3x-1>0$;

3) $6-5x>-4$ и $x<2$?

3. Какие из следующих высказываний истинны:

1) $-7x<-28 \Rightarrow x>4$;

2) $\frac{x}{3}<10 \Rightarrow x<30$;

3) $x<6 \Rightarrow x<5$;

4) $x<6 \Rightarrow x<20$?

4. Что больше: $3a$ или $10a$? $0{,}1b$ или $100b$?

5. Решите неравенство $3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-2$ и объясните, какие теоретические положения были при этом использованы.

6. Докажите, что решением неравенства $2(x+1)+5>3-(1-2x)$ является любое действительное число.

7. Докажите, что не существует действительного числа, которое являлось бы решением неравенства $3(2-x)-2>5-3x$.

8. Докажите, что при любом действительном a значение выражения $3a(a+6)$ меньше, чем значение выражения $(3a+6)(a+4)$.

9. Длина прямоугольного участка в 5 раз больше его ширины, а ширина больше 4 м. Докажите, что площадь участка больше 80 м^2.

10. Одна сторона треугольника равна 18 см, а другая 23 см. Установите:

1) какое наименьшее число сантиметров может иметь третья сторона;

2) какое наибольшее число сантиметров может иметь третья сторона.

11. Одна сторона треугольника равна 5 м, а другая 8 м. Какие натуральные значения может принимать длина третьей стороны, если периметр треугольника: 1) меньше 22 м; 2) больше 17 м?

§ 16. ФУНКЦИИ

Мы уже не раз говорили о том, что многие математические понятия возникают в результате абстрагирования от свойств объектов, реально существующих в природе. Но, отражая некоторые стороны реальной действительности, эти понятия содействуют тем самым ее познанию.

Одним из понятий, отражающих взаимосвязи явлений и предметов, является понятие функции. Это одно из важнейших понятий математики, исходное понятие ведущей ее области — математического анализа. В школе, как и в математике вообще, основное внимание уделяется числовым функциям. Причиной этого является тесная связь математики с естественными науками, в частности с физикой, для которых аппарат функций служит средством количественного описания свойств и явлений, их взаимосвязей.

Важность и сложность понятия функции требует от начального курса математики (как части всей школьной математики) постепенной и систематической подготовки учащихся к усвоению этого понятия, т. е. пропедевтики. В связи с этим в нашем курсе мы рассмотрим ряд вопросов, которые должны помочь учителю грамотно, с пониманием сути дела осуществлять пропедевтику понятия функции в начальных классах и обучать учащихся решению задач с пропорциональными величинами.

99. Понятие функции

Учащиеся начальных классов решают задачу: «Килограмм апельсинов стоит 2 р. Сколько стоят 3 кг апельсинов? 4 кг? 6 кг апельсинов?» Проанализируем ее содержание. В задаче речь идет о таких величинах, как масса купленных апельсинов, их стоимость, цена одного килограмма. Если обозначить через x массу купленных апельсинов, а через y их стоимость, то зависимость между ними будет выражаться формулой $y=2x$. По этой формуле для каждого значения x можно найти соответствующее ему значение y. Установленную зависимость y от x называют функцией. Она такова, что каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.

Определение. **Функцией называется такая зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению x соответствует единственное значение y.**

Переменную x называют **независимой переменной** или **аргументом**, а переменную y — **зависимой переменной.** Говорят также, что **y является функцией от x.** Значение y, соответствующее заданному значению x, называют **значением функции.**

Чтобы задать функцию, нужно задать числовое множество X (его называют областью определения функции) и способ (правило), с помощью которого для каждого числа x из множества X можно найти соответствующее число y — значение функции.

Функции принято обозначать буквами f, g, h и др. Если f — функция, то значение переменной y, соответствующее аргументу x, обозначают $f(x)$, т. е. $y=f(x)$.

Чаще всего функции задают с помощью формул, указывающих, как по данному значению аргумента найти соответствующее значение функции. Например, если длина стороны квадрата равна x дм, а площадь y дм^2, то формула $y=x^2$ задает функцию, областью определения которой будет множество положительных действительных чисел.

Если куплено x тетрадей, по 3 к. каждая, а y к.— стоимость всей покупки, то формула $y=3x$ задает функцию, область опре-

деления которой есть множество целых неотрицательных чисел.

Иногда функцию задают таким образом:

$$y=\begin{cases} 3x-1 & \text{при } x\geqslant 0, \\ 2x & \text{при } x<0, \end{cases}$$

т. е. на разных участках значений x функция задается различными формулами.

Часто при задании функции с помощью формулы ее область определения не указывается. В таких случаях считают, что область определения состоит из всех значений переменной, при которой эта формула имеет смысл. Например, если задана функция $y=\sqrt{x+2}$, то считают, что ее область определения — множество тех значений x, при которых имеет смысл выражение $\sqrt{x+2}$, т. е. множество $[-2, \infty)$.

В начальном курсе математики пропедевтика понятия функции осуществляется при выполнении таких упражнений, в которых рассматриваются различные функциональные зависимости между переменными. При этом, конечно, нет ни соответствующей терминологии, ни символики, внимание обращается на взаимосвязи, отношения.

Проведем примеры нескольких заданий, выполнение которых способствует подготовке учащихся начальных классов к изучению понятия функции.

1. $39+a$. Вычисли значения суммы, если a принимает значения: 0, 6, 15, 31, 46, 52.

При выполнении этого задания устанавливается зависимость значений суммы $39+a$ от значений переменной a. Эта зависимость — функция с областью определения {0, 6, 15, 31, 46, 52}.

2. Заполни таблицу:

b	7	9	16	28
$16+b$				

Это задание по своей сути аналогично заданию 1, но предложено в другой форме.

3. Составь все возможные примеры на сложение однозначных чисел с ответом 12.

При выполнении упражнения можно составить таблицу:

12							
	3	4	5	6	7	8	9
	9	8	7	6	5	4	3

С помощью таблицы устанавливается функциональная зависимость значений второго слагаемого от значений первого. Область определения этой функции образуют числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

4. Найди площадь квадратов, если один квадрат имеет длину стороны 1 см, второй 2 см, третий 3 см.

При решении данной задачи устанавливается зависимость между длиной стороны и площадью квадрата. Эта зависимость — функция, так как каждому значению длины стороны квадрата сопоставляется единственное значение его площади:

если длина стороны 1 см, то площадь равна 1 см^2;
если длина стороны 2 см, то площадь равна 4 см^2;
если длина стороны 3 см, то площадь равна 9 см^2.

С разнообразными функциональными зависимостями учащиеся начальных классов встречаются при решении текстовых задач. Например, в задаче «На 80 р. купили 20 м ткани. Сколько будет стоить 10 м такой ткани?» рассматривается зависимость между количеством купленной ткани и ее стоимостью (при постоянной цене одного метра ткани). Эта зависимость — функция.

Упражнения

1. На складе было 400 т угля. Ежедневно из этого запаса расходовалось по 50 т. Запишите формулу, выражающую зависимость количества угля на складе (y т) от времени (x дн.), и докажите, что эта формула задает функцию. Укажите область определения этой функции.

2. Длина окружности (C) с радиусом R подсчитывается по формуле $C=2\pi R$. Функциональную зависимость между какими переменными задает эта формула? Какова область определения данной функции?

3. Находится ли площадь квадрата в функциональной зависимости от длины его диагонали?

4. Каждому натуральному числу n из промежутка $[6, 20]$ поставили в соответствие остаток, который получается при делении этого числа n на 4. Задайте это соответствие при помощи таблицы и объясните, почему оно является функцией и какова его область определения.

5. Найдите область определения функции, заданной формулой:

1) $y=5x^2-4$; 2) $y=\frac{3}{x+5}$; 3) $y=\sqrt{1-x}$; 4) $y=\frac{\sqrt{1-x}}{x}$.

6. Приведите примеры трех упражнений из учебников математики начальных классов, при выполнении которых может быть осуществлена пропедевтика понятия функции.

7. Какие из следующих упражнений, взятых из учебников математики начальных классов, могут быть использованы для пропедевтики понятия функции и почему:

1) Заполни таблицу:

c	1	3	4	6
$10\cdot c$				

2) Реши уравнение $7 \cdot d = 35$.

3) Увеличь в 3 раза каждое из чисел: 7, 5, 9, 4, 8, 6.

4) Из ряда чисел 15, 16, 17, 18 выпиши те значения c, при которых верно неравенство $c + 24 > 40$.

100. График функции

Графическое изображение функции не только позволяет представить функциональную зависимость наглядно, но дает возможность упростить изучение ее свойств. Поэтому даже в том случае, если функция задана при помощи формулы, часто обращаются к ее графику на координатной плоскости.

Определение. **Графиком функции f, заданной на множестве X, называется множество таких точек координатной плоскости, которые имеют координаты x и $f(x)$ для всех x из множества X.**

Вспомним, какой вид имеют графики ряда функций, заданных формулой.

1. Построим график функции $y = x$ при условии, что областью ее определения является множество действительных чисел.

Так как при любом значении x значение ординаты тоже будет x, то график данной функции представляет собой множество точек координатной плоскости, абсцисса и ордината которых равны между собой. Множество таких точек есть биссектриса первого и третьего координатных углов. Эта прямая и является графиком функции $y = x$ (рис. 137).

2. Построим график функции $y = 3$, считая, что областью ее определения является множество действительных чисел.

Так как при любом значении x значение y будет равно 3, то графиком данной функции будет множество точек координатной плоскости, абсцисса которых будет действительное число x, а ордината равна 3. Множество таких точек есть прямая, параллельная оси абсцисс (рис. 138).

3. Построим график функции $y = x^2$, считая, что ее область определения есть множество действительных чисел.

Составим таблицу некоторых соответственных значений x и y:

x	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
y	0	1	1	4	4	9	9	16	16

Изобразим каждую пару найденных значений x и y точкой на координатной плоскости (рис. 139). Так как x принимает не только целые значения, но и любые действительные, то естественно соединить полученные точки плавной линией (рис. 139). Эта линия называется параболой.

Для анализа зависимости между переменными важно понимание сути возрастающей и убывающей функций.

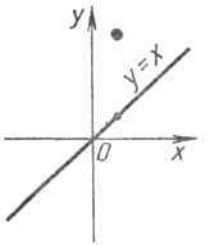


Рис. 137

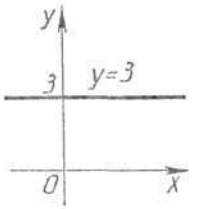
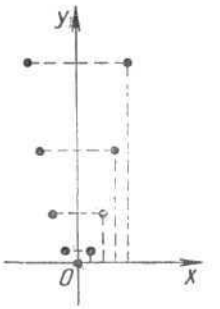


Рис. 138



а



б

Рис. 139

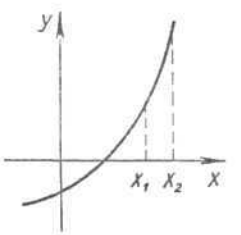


Рис. 140

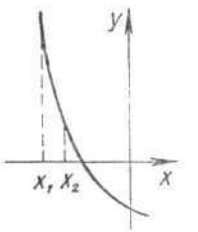


Рис. 141

Определение. Функция f называется возрастающей на **некотором промежутке X, если для любых x_1, x_2 из множества X выполняется условие $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.**

Особенность графика функции, возрастающей на промежутке X: при движении вдоль оси Ox слева направо по промежутку X ордината графика увеличивается (рис. 140).

Определение. **Функция f называется убывающей на некотором промежутке X, если для любых x_1, x_2 из множества X выполняется условие $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.**

Особенность графика убывающей функции, убывающей на промежутке X: при движении вдоль оси Ox слева направо по промежутку X ордината графика уменьшается (рис. 141).

Упражнения

1. Измеряя температуру воздуха в течение суток, получили следующую таблицу:

x_t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
y°C	1	0	−2	−3	−2	0	1	2	3	3,5	4	3,5	2

Постройте график данной зависимости. Является ли она функцией?

2. Каждому числу, принадлежащему множеству $X=\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}$, поставлен в соответствие его модуль. Покажите, что данная зависимость — функция, и постройте ее график.

3. Постройте график функции $y=x$, если ее областью определения является множество: 1) $[-2, 2]$; 2) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

4. Постройте график функции $y=2x^2$, если ее областью определения является множество: 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $[-3, 2]$; 3) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$.

5. Докажите, что график функции $y=4x^2-4$ проходит через точку $A(-0{,}5; -3)$ и не проходит через точку $B(1, -4)$.

6. Докажите, что все точки графика функции $y=102x$ находятся в первой и третьей координатной четверти.

7. В чем вы видите сходство в поведении функций, графики которых изображены на рисунке 142?

8. Графики на рисунке 143 разбиты на классы: {а, в}, {б, е}, {г, д}. Какие свойства соответствующих функций положены в основу этой классификации?

9. Разбейте графики, приведенные на рисунке 144, на три класса так, чтобы графики а), б), е) оказались в разных классах. Какие свойства данных функций Вы положили в основу выполненной классификации?

10. Формированию каких представлений о функции и ее свойствах способствуют следующие упражнения, выполняемые в начальных классах:

1) Заполни таблицу:

b	7	9	16	28
$16+b$				

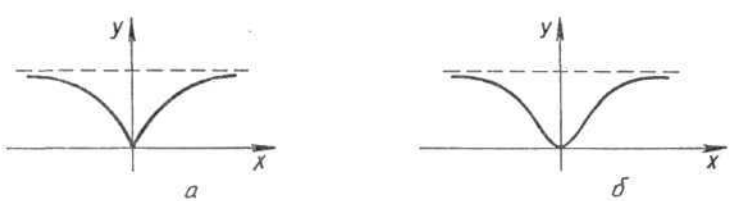


Рис. 142

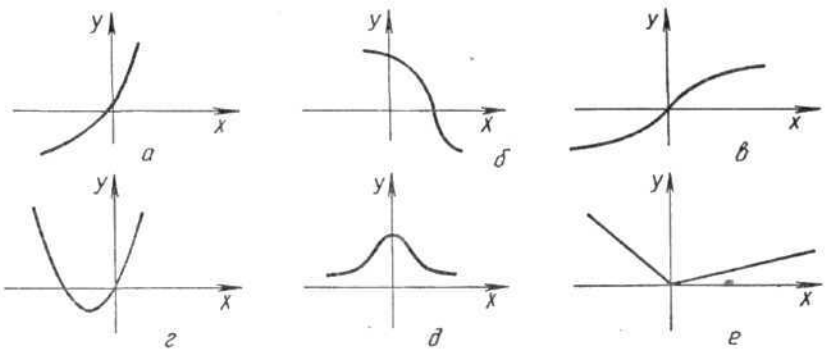


Рис. 143

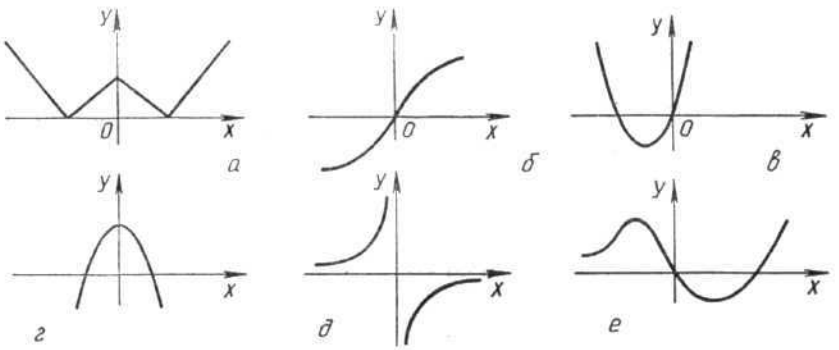


Рис. 144

Как изменяются слагаемые, как изменяется сумма?

2) В семи одинаковых ящиках 42 кг помидоров. Сколько килограммов помидоров в c таких ящиках? Составь по задаче выражение и найди его значение при $c=6$, $c=8$, $c=9$, $c=10$.

3) На лесном участке было 112 берез и x осин. Объясни, что обозначают следующие выражения: $112+x$, $112-x$, $x-112$.

101. Линейная функция

Если учащийся купил x карандашей по 4 к. за карандаш и тетрадь за 13 к., то стоимость (y к.) его покупки может быть определена так: $y=4x+13$. Зависимость между количеством купленных карандашей и стоимостью всей покупки является функцией, так как каждому значению x соответствует единственное значение y. Эта функция называется линейной.

Определение. **Линейной функцией называется функция, которую можно задать при помощи формулы вида $y=kx+b$, где x — независимая переменная, а k и b — заданные действительные числа.**

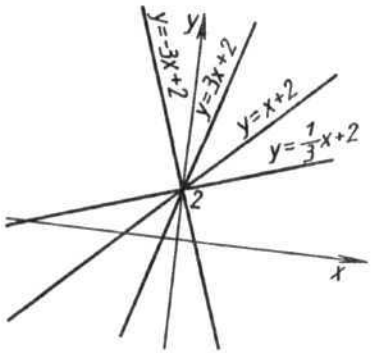


Рис. 145

Если, в частности, $k=0$, то получается функция вида $y=b$, ее называют постоянной функцией.

Областью определения линейной функции является множество действительных чисел. Графиком линейной функции $y=kx+b$ является прямая. Положение этой прямой на плоскости определяют коэффициенты k и b. Покажем это.

Рассмотрим сначала графики функций, заданных формулами $y=\frac{1}{3}x+2$, $y=x+2$, $y=3x+2$, $y=-3x+2$ (рис. 145). В данных уравнениях коэффициент k принимает различные значения, а коэффициент b постоянен. Если обозначить через φ угол между осью OX и графиком линейной функции и измерять его против часовой стрелки, то можно заметить, что величина этого угла зависит от коэффициента k. Если $k>0$, то угол φ острый (рис. 146); если же $k<0$, то угол φ тупой (рис. 147). Кроме того, из рисунка 145 видно, что, чем больше модуль числа k, тем ближе прямая $y=kx+b$ к оси Oy.

Так как коэффициент k связан с углом φ, то k называют **угловым коэффициентом.**

Рассмотрим теперь функции, заданные формулами $y=x+3$ и $y=x-3$ (рис. 148). В них коэффициент k один и тот же, а коэффициент b принимает разные значения. Сравнивая построенные на рисунке 148 прямые, замечаем, что при изменении b график перемещается параллельно самому себе. Если $x=0$, то $y=b$, т. е. точка $(0, b)$ принадлежит графику функции $y=kx+b$, следовательно, коэффициент b есть значение длины отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy. Так, для функций $y=x+3$ и $y=x-3$ этот отрезок составляет 3 единицы.

Если обратиться еще раз к рисунку 145, то можно увидеть, что при $k>0$ функция $y=kx+b$ возрастает, а при $k<0$ убывает на всей области определения. Действительно, пусть $x_1<x_2$. Тогда

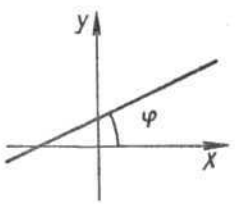


Рис. 146

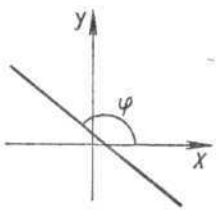


Рис. 147

$y_1=kx_1+b$, $y_2=kx_2+b$. Сравним y_1 и y_2: $y_2-y_1=(kx_2+b)-(kx_1+b)=k(x_2-x_1)$.

По условию $x_2-x_1>0$, значит, знак разности y_2-y_1 зависит от знака коэффициента k. Если $k>0$, то $y_2-y_1>0$, и, следовательно, из того, что $x_1<x_2$, следует, что $y_1<y_2$, т. е. функция $y=kx+b$ возрастающая на множестве действительных чисел. Если $k<0$, то $y_2-y_1<0$, откуда $y_1>y_2$, и, следовательно, из того, что $x_1<x_2$, следует, что $y_1>y_2$, т. е. функция $y=kx+b$ убывающая на множестве действительных чисел.

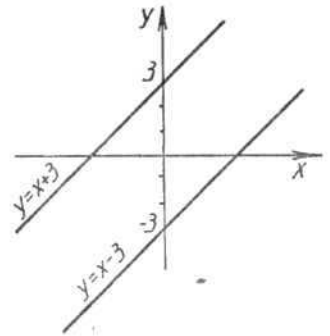


Рис. 148

Упражнения

1. Постройте график функции $y=2x-3$ при условии, что ее областью определения является: 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $[-3; 2]$; 3) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

2. Известно, что график функции $y=2x+b$ проходит через точку $(1, 4)$. Пройдет ли он через точку $(3, 8)$?

3. Найдите коэффициенты k и b, если функция задана формулой: 1) $x-2x=-3$; 2) $2x-3y=10$; 3) $x-3y=0$.

4. Зависимость массы (y) ящика с деталями от числа деталей (x) выражается формулой $y=0{,}3x+1{,}5$. Вычислите массу ящика с деталями при следующих значениях:

x	10	15	20	23
y				

Каким будет график данной зависимости?

5. До привала туристы прошли 12 км. После привала они шли x часов со скоростью 2,5 км/ч. Составьте формулу, выражающую зависимость между временем движения (x) и всем пройденным расстоянием (y). Какую функцию задает эта формула? Какова область определения данной функции, если весь пройденный туристами путь не превышает 25 км?

6. Зависимость стоимости (y) телеграммы от числа слов (x) в ней выражается формулой $y=5x+20$. Вычислите стоимость телеграммы при следующих значениях x:

x (слов)	10	16	25	30
y (копеек)				

Какова область определения данной зависимости, если стоимость телеграммы не превышает 1 р. 20 к.?

7. Из населенного пункта в город, находящийся на расстоянии 20 км, со скоростью 5 км/ч отправился пешеход. На каком расстоянии (s км) от города будет пешеход через t часов? Какие значения может принимать t?

102. Прямая пропорциональность

Если t — время движения пешехода (в часах), s — пройденный им путь (в километрах) и он движется равномерно со скоростью 4 км/ч, то каждому значению t соответствует единственное значение s, получаемое по формуле $s=4t$. Следовательно, формула $s=4t$ задает функцию.

Рассмотрим еще один пример. Если цена одного пакета молока 16 к., то стоимость y (в копейках) x пакетов может быть подсчитана так: $y=16x$. Так как каждому значению x соответствует единственное значение y, то формула $y=16x$ задает функцию.

В приведенных примерах мы имели дело с функцией, которую называют **прямой пропорциональностью.**

Определение. **Прямой пропорциональностью называется функция, которая может быть задана при помощи формулы вида $y=kx$, где x — независимая переменная, а k — не равное нулю действительное число.**

Число k в формуле $y=kx$ называют **коэффициентом пропорциональности**; о переменной y говорят, что она пропорциональна переменной x.

Областью определения функции $y=kx$ является множество действительных чисел.

Прямая пропорциональность — частный случай линейной функции $y=kx+b$, получаемой при $b=0$. Поэтому:

1) графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат;

2) при $k>0$ функция $y=kx$ возрастает на всей области определения, а при $k<0$ убывает.

Например, прямая пропорциональность $y=2x$ является функцией, возрастающей на множестве действительных чисел: если значения x растут, то растут и значения функции (рис. 149). Функция $y=-3x$ убывающая на множестве действительных чисел: если значения x растут, то значения функции уменьшаются (рис. 150).

Однако прямая пропорциональность обладает и свойством, которого нет у линейной функции: если функция f — прямая пропорциональность и (x_1, y_1), (x_2, y_2) — пары соответственных значений x и y, причем $x_2\neq 0$, то $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$. Другими словами, если $y=kx$, то отношение двух значений переменной x равно отношению соответственных значений y.

Действительно, если f — прямая пропорциональность, то она может быть задана формулой $y=kx$, и тогда для двух различных

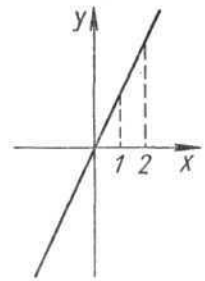


Рис. 149

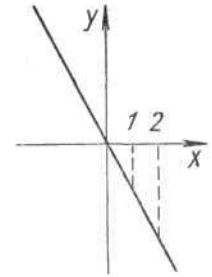


Рис. 150

значений x_1 и x_2 имеем, что $y_1=kx_1$ и $y_2=kx_2$. Так как $x_2\neq 0$ и $k\neq 0$, то $y_2\neq 0$, следовательно, $\frac{y_1}{y_2}=\frac{x_1}{x_2}$.

Если значениями переменных x и y являются положительные числа, то доказанное свойство прямой пропорциональности можно сформулировать так:

С увеличением (уменьшением) значений переменной x в несколько раз соответствующее значение переменной y увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Прямая пропорциональность в начальных классах специально не изучается, но при решении текстовых задач учащиеся встречаются с различными зависимостями между величинами, в том числе и с прямой пропорциональностью. Приведем примеры таких задач.

1) Метр полотна стоит 4 р. Сколько стоят 2 м полотна? 3 м? 5 м? 8 м?

В этой задаче рассматривается зависимость стоимости от количества купленного полотна, цена 1 м полотна постоянна. Так как эта зависимость может быть выражена формулой $y=4x$, где x — число метров купленного полотна, а y — его стоимость, то имеем прямую пропорциональность. Коэффициент пропорциональности 4 задан в условии задачи, так же как и значения, которые принимает x.

2) Из куска ткани длиной 24 м в мастерской сшили 8 одинаковых костюмов. Сколько потребуется ткани на 20 таких же костюмов?

В задаче рассматривается зависимость расхода ткани от количества костюмов.

Эта зависимость прямо пропорциональная, поскольку может быть задана формулой $y=3x$, где 3 — количество метров ткани для одного костюма, x — число сшитых костюмов, y — количество ткани, израсходованной на эти костюмы. Коэффициент пропорциональности находят, зная соответственные значения переменных x и y: $24:8=3$ (м).

Упражнения

1. Укажите среди следующих функций, заданных табличным способом, прямые пропорциональности:

1)

x	2	4	6	8	10
y	14	28	42	56	70

3)

x	2	4	6	8	10
y	4	16	36	64	100

2)

x	1	2	3	4	5
y	0,2	0,4	0,6	0,8	1

4)

x	1	2	3	4	5
y	-3	$-\frac{2}{3}$	-9	$-\frac{4}{3}$	-15

2. Постройте графики функций $y=-2x$ и $y=10x$ и покажите, что первая из них убывающая на множестве действительных чисел, а вторая возрастающая на том же множестве.

3. Выясните, какая зависимость существует между величинами, данными в задаче, и решите задачу:

1) Вместимость одной банки 3 л. Сколько потребуется банок, чтобы разлить 6 л фруктового сока? 9 л? 12 л? 15 л?

2) В первый день магазин продал 8 одинаковых портфелей и получил за них 32 р. Во второй день было продано 6 таких портфелей. Сколько денег получили за портфели во второй день?

3) Из 24 кг молока получается 3 кг сливок, из 20 кг сливок получается 4 кг сливочного масла, а из 12 кг сливочного масла получается 9 кг топленого масла. Сколько килограммов топленого масла можно получить из 2400 кг молока?

4. Стороны прямоугольника 6 см и x см. Площадь этого прямоугольника y см^2. Запишите формулу, выражающую зависимость площади этого прямоугольника от длины стороны. Постройте график этой зависимости при условии, что $x \leqslant 8$.

5. Масса одного карандаша равна 1,5 г. Обозначьте массу x карандашей через y (в г) и постройте график полученной зависимости при условии, что $x \leqslant 4$.

103. Обратная пропорциональность

Если s км — расстояние, которое требуется пройти туристу, t ч — время движения, а v км/ч — его скорость, то каждому значению скорости соответствует единственное значение времени. Следовательно, формула $t=\frac{s}{v}$ задает функцию. Ее называют **обратной пропорциональностью.**

Определение. **Обратной пропорциональностью называется функция, которую можно задать при помощи формулы вида $y=\frac{k}{x}$, где x — независимая переменная, а k — не равное нулю число.**

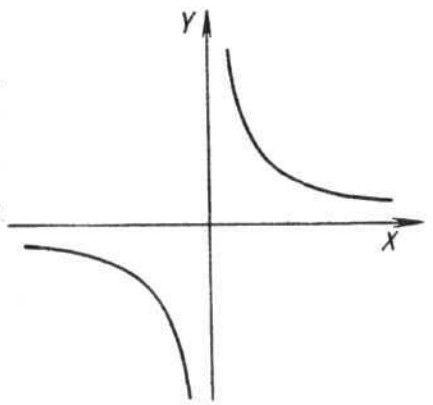


Рис. 151

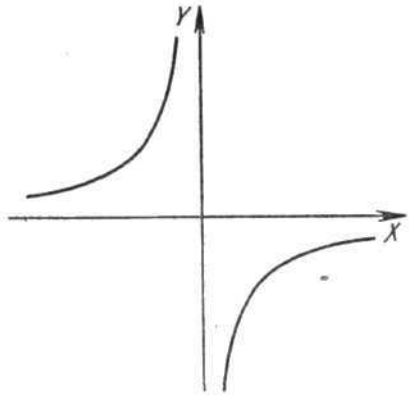


Рис. 152

О переменной y говорят, что она обратно пропорциональна переменной x.

Областью определения функции $y=\frac{k}{x}$ является множество действительных чисел, отличных от нуля.

Графиком обратной пропорциональности является **гипербола. При $k>0$** ее ветви находятся в первой и третьей четвертях (рис. 151), при $k<0$ — во второй и четвертой (рис. 152). Чтобы построить гиперболу, надо составить таблицу значений функции $y=\frac{k}{x}$. Так, для функции $y=\frac{6}{x}$, где x — действительное число, отличное от нуля, таблица значений может быть такой:

x	1	2	3	6	12
y	6	3	2	1	$\frac{1}{2}$

При отрицательных значениях x график функции строится симметрично относительно начала координат. Если функция f — обратная пропорциональность и (x_1, y_1), (x_2, y_2) — пары соответственных значений x и y, причем $x_2 \neq 0$, $y_1 \neq 0$, то $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}$. Другими словами если $y=\frac{k}{x}$, то отношение двух значений переменной x равно обратному отношению соответственных значений y.

Действительно, если f — обратная пропорциональность, то она может быть задана формулой $y=\frac{k}{x}$, и тогда для двух различных значений x_1 и x_2 имеем, что $y_1=\frac{k}{x_1}$, $y_2=\frac{k}{x_2}$. Так как $x_2 \neq 0$ и $k \neq 0$,

$y_1 \neq 0$, то, следовательно, $\frac{y_2}{y_1} = \frac{k}{x_2} : \frac{k}{x_1} = \frac{kx_1}{x_2 k} = \frac{x_1}{x_2}$. Итак, $\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_1}{x_2}$.

Если значениями переменных x и y являются положительные числа, то доказанное свойство можно сформулировать так:

С увеличением (уменьшением) значений переменной x в несколько раз соответствующее значение переменной y уменьшается (увеличивается) во столько же раз.

С обратной пропорциональностью учащиеся начальных классов встречаются, главным образом, при решении задач, но специально эту зависимость не изучают.

Приведем примеры таких задач.

1) Надо упаковать в пакеты 24 кг муки. Какова будет масса 1 пакета, если эту муку упаковать в 3 одинаковых пакета? в 4 пакета? в 6 пакетов? в 8 пакетов?

В задаче рассматриваются три величины: масса всей муки, количество пакетов и масса муки в одном пакете. Первая величина принимает одно и то же значение 24. Две другие находятся в обратно пропорциональной зависимости, так как эту зависимость можно выразить формулой $y = \frac{24}{x}$, где x — количество пакетов, а y — масса муки в одном пакете. Зная это, легко найти, что если муку упаковать в 3 пакета, то в одном пакете будет $24:3=8$ (кг) муки; если в 4 пакета, то в одном пакете будет $24:4=6$ (кг) муки и т. д.

2) С участка собрали 4 мешка картофеля, по 50 кг в каждом. Этот картофель разложили для хранения в ящики, по 20 кг в каждый. Сколько ящиков потребовалось?

В задаче рассматривается зависимость между всей массой картофеля, массой картофеля в некоторой емкости и количеством этих емкостей. Первая величина постоянна, ее значение находится умножением: $50 \cdot 4 = 200$ (кг), а две другие находятся в обратно пропорциональной зависимости, которая может быть задана формулой $y = \frac{200}{x}$, где x — масса одной емкости, y — количество этих емкостей.

Упражнения

1. Укажите среди следующих функций, заданных табличным способом обратные пропорциональности:

1)

x	1	2	4	10	40
y	20	10	5	2	$\frac{1}{2}$

2)

x	2	3	6	8	12
y	12	8	4	3	1

3)

x	1	3	4	6	8
y	−1	−5	−7	−11	−15

4)

x	−2	−4	−3	6	12
y	6	3	4	−2	−1

2. Постройте график функции $y = \frac{12}{x}$ при условии, что ее область определения:

1) множество действительных чисел;

2) $(0, \infty)$;

3) $[1, 6]$; 4) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

3. Выясните, какая зависимость существует между величинами, данными в задаче, и решите ее:

1) С опытной грядки сняли 24 кг помидоров. Сколько надо пакетов, чтобы упаковать эти помидоры по 1 кг в пакет? по 3 кг? по 4 кг? по 6 кг? по 8 кг? по b кг?

2) Велосипедист ехал со скоростью 12 км/ч и был в пути 2 ч. Сколько времени потребуется пешеходу, чтобы пройти это расстояние со скоростью 4 км/ч?

3) Два столяра отремонтировали стульев поровну. Первый столяр работал 6 дней, ремонтируя по 10 стульев в день, а второй работал 5 дней. По скольку стульев в день ремонтировал второй столяр?

4. Площадь прямоугольника с основанием x см равна 8 см^2. Какова высота у этого прямоугольника? Покажите, что зависимость между основанием и высотой прямоугольника при постоянной площади является функцией, и постройте ее график при условии, что основание прямоугольника не превышает 0,5 см.

5. Задание «Заполни пропуск так, чтобы запись $24:3 > 24:\square$ была верной» учащийся выполнил так:

Чтобы частное 24 и 3 было больше частного чисел 24 и неизвестного числа $\square$, надо, чтобы второй делитель был меньше первого, например 2.

Какое свойство и какой функции неявно использовал учащийся?

Глава V

ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ИЗМЕРЕНИЯ

Одна из существенных особенностей окружающей нас действительности — беспрерывное и многообразное ее изменение. Меняется погода, возраст человека, изменяются условия жизни людей, животный и растительный мир. Чтобы дать научное обоснование этим процессам, нужно знать их определенные свойства, например такие, как время, масса, скорость. Все названные свойства — величины. Их вы изучали в школьных курсах математики, физики, химии, биологии. С некоторыми из них мы встречались и в нашем курсе. Однако этого недостаточно учителю начальных классов — то огромное внимание, которое уделяется величинам и их измерению в начальной школе, требует более углубленной подготовки. На это и нацелена данная глава.

§ 17. ПОНЯТИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЕ ИЗМЕРЕНИЯ

104. Понятие величины

Длина, площадь, масса, скорость, стоимость — величины. Первоначальное знакомство с ними происходит в начальной школе, где величина наряду с числом является ведущим понятием. Величины — это особые свойства реальных объектов или явлений. Например, свойство предметов иметь протяженность называется длиной. Это же слово мы употребляем, когда говорим о протяженности конкретных объектов. Поэтому про длины конкретных объектов говорят, что это величины одного рода. Вообще однородные величины выражают одно и то же свойство объектов некоторого множества. Разнородные величины выражают различные свойства объектов. Так, длина и площадь — это разнородные величины.

Величины — длина, площадь, масса и другие обладают рядом свойств:

1. Любые две *величины одного рода сравнимы:* они либо равны, либо одна меньше другой. Иными словами, для величин одного рода имеют место отношения «равно», «меньше» и «больше» и для любых величин a и b справедливо одно и только одно из отношений: $a<b$, $a=b$, $a>b$.

Например, мы говорим, что длина гипотенузы прямоугольного треугольника больше, чем длина любого катета этого треугольника, масса яблока меньше массы арбуза, а длины противоположных сторон прямоугольника равны.

2. Величины одного рода можно *складывать,* в результате сложения получится величина того же рода. Другими словами, для любых двух величин a и b однозначно определяется величина $a+b$, ее называют *суммой* величин a и b.

Например, если a — длина отрезка AB, b — длина отрезка BC (рис. 153), то длина отрезка AC есть сумма длин отрезков AB и BC.

3. Величину *умножают на действительное число,* получая в результате величину того же рода. Другими словами, для любой величины a и любого неотрицательного действительного числа x существует единственная величина $b=x\cdot a$; величину b называют *произведением* величины a на число x.

Например, если длину a отрезка AB умножить на $x=2$, то получим длину $2a$ нового отрезка AC (рис. 154).

4. Величины одного рода *вычитают,* определяя разность величин через сумму: *разностью* величин a и b называется такая величина c, что $a=b+c$.



Рис. 153

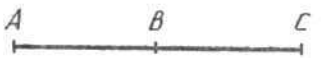


Рис. 154

Например, если a — длина отрезка AC, b — длина отрезка AB, то длина отрезка BC есть разность длин отрезков AC и AB.

5. Величины одного рода *делят,* определяя частное через произведение величины на число: *частным* величин a и b называется такое неотрицательное действительное число x, что $a=x\cdot b$. Чаще это число x называют отношением величин a и b и записывают в таком виде: $\frac{a}{b}=x$.

Например, отношение длины отрезка AC к длине отрезка AB равно 2 (рис. 154).

Упражнения

1. Имеются два куска проволоки. Каким образом можно сравнить их длины, не прибегая к измерению?

2. В две различные банки налита вода. Как, не измеряя, сравнить имеющиеся объемы воды?

3. Как можно сравнить массы двух предметов, не определяя массу каждого из них?

4. На рисунке 155 изображены два прямоугольника, имеющие площади a и b. Постройте прямоугольник, площадь которого равна:

1) $a+b$; 2) $5a$; 3) $\frac{1}{2}b$; 4) $b-a$.

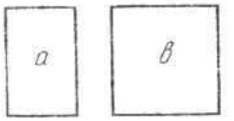


Рис. 155

105. Понятие измерения величины

Сравнивая величины непосредственно, мы можем установить их равенство или неравенство. Чтобы получить более точный результат сравнения, например узнать, на сколько масса одного тела больше массы другого, необходимо величины измерить. Измерение заключается в сравнении данной величины с некоторой величиной того же рода, принятой за единицу. Процесс сравнения зависит от рода рассматриваемых величин: для длин он один, для площадей — другой, для масс — третий и т. д. Но каким бы ни был этот процесс, в результате измерения величина получает определенное численное значение при выбранной единице.

Вообще *если дана величина a и выбрана единица величины e, то в результате измерения величины a находят такое действительное число x, что $a=x\cdot e$. Это число x называют численным значением величины a при единице величины e.*

Последнее предложение можно записать в символической форме: $x=m_e(a)$.

Согласно определению любую величину можно представить в виде произведения некоторого числа и единицы этой величины. Например, 7 кг $=7\cdot 1$ кг, 12 см $=12\cdot 1$ см, 3 ч $=3\cdot 1$ ч.

Используя это, а также определение умножения величины на

число, можно обосновать процесс перехода от одной единицы величины к другой. Пусть, например, требуется выразить $\frac{5}{12}$ ч в минутах. Так как $\frac{5}{12}$ ч $=\frac{5}{12}\cdot 1$ ч и 1 ч $=60$ мин, то $\frac{5}{12}$ ч $=\frac{5}{12}\cdot 60$ мин $=$ $=\left(\frac{5}{12}\cdot 60\right)$ мин $=25$ мин.

Величины, которые вполне определяются одним численным значением, называются **скалярными величинами.** Такими, к примеру, являются длина, площадь, объем, масса.

Кроме скалярных величин, в математике рассматривают еще векторные величины. Для определения векторной величины необходимо указать не только ее численное значение, но и направление. Векторными величинами являются сила, ускорение, напряженность электрического поля и. др.

В нашем курсе мы будем рассматривать только скалярные величины и причем такие, численные значения которых положительны, т. е. положительные скалярные величины.

Измерение величин позволяет свести сравнение их к сравнению чисел, операции над величинами к соответствующим операциям над числами.

1. Если величины a и b измерены при помощи единицы величины e, то отношения между величинами a и b будут такими же, как и отношения между их численными значениями, и наоборот:

$$a=b \Leftrightarrow m_e(a)=m_e(b),$$
$$a<b \Leftrightarrow m_e(a)<m_e(b),$$
$$a>b \Leftrightarrow m_e(a)>m_e(b).$$

Например, если массы двух тел таковы, что $a=5$ кг, $b=3$ кг, то можно утверждать, что масса a больше массы b, поскольку $5>3$.

2. Если величины a и b измерены при помощи единицы величины e, то, чтобы найти численное значение суммы $a+b$, достаточно сложить численные значения величин a и b:

$$a+b=c \Leftrightarrow m_e(a+b)=m_e(a)+m_e(b).$$

Например, если $a=15$ кг, $b=12$ кг, то $a+b=15$ кг $+12$ кг $=$ $=(15+12)$ кг $=27$ кг.

3. Если величины a и b таковы, что $b=x\cdot a$, где x — положительное действительное число, и величина a измерена при помощи единицы величины e, то, чтобы найти численное значение величины b при единице e, достаточно число x умножить на число $m_e(a)$:

$$b=xa \Leftrightarrow m_e(b)=x\cdot m_e(a).$$

Например, если масса b в 3 раза больше массы a, т. е. $b=3a$, и $a=2$ кг, то $b=3a=3\cdot(2\text{ кг})=(3\cdot 2)$ кг $=6$ кг.

Упражнения

1. Выразите: 1) в сантиметрах 8 см 79 мм; 2) в минутах 8 мин 12 с; 3) в тоннах 125 кг 300 г.

2. Сравните величины:

1) 56 мин и $\frac{7}{10}$ ч; 2) 1,5 см и $\frac{3}{20}$ дм; 3) $\frac{3}{50}$ м и $\frac{4}{5}$ дм.

3. Решите нижеприведенные задачи и объясните, какие действия над величинами выполнялись в процессе решения:

1) На обработку трех деталей потратили $\frac{4}{3}$ ч. На первую деталь было израсходовано 0,25 ч, на вторую $\frac{2}{3}$ ч. Сколько времени пошло на обработку третьей детали?

2) Книга дешевле альбома на 78 к. Сколько стоят два таких альбома, если одна книга стоит 68 к?

3) На нефтебазе было 12 680 т бензина. В первый день база отпустила 834 т, во второй — в 2 раза меньше, чем в первый, а в третий — на 229 т больше, чем во второй. Сколько тонн бензина осталось на базе?

4) Из деревянного бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, длина которого 24 см, ширина в 3 раза меньше длины, а высота 11 см, вырезали куб с ребром 6 см. Найдите объем оставшейся части.

106. Из истории развития системы единиц величин

Человек давно осознал необходимость измерять разные величины, причем измерять как можно точнее. Основой точных измерений являются удобные, четко определенные единицы величин и точно воспроизводимые эталоны (образцы) этих единиц. В свою очередь, точность эталонов отражает уровень развития науки, техники и промышленности страны, говорит о ее научно-техническом потенциале.

В истории развития единиц величин можно выделить несколько периодов.

Самым древним является период, когда единицы длины отождествлялись с названием частей человеческого тела. Так, в качестве единиц длины применяли ладонь (ширина четырех пальцев без большого), локоть (длина локтя), фут (длина ступни), дюйм (длина сустава большого пальца) и др. В качестве единиц площади в этот период выступали: колодец (площадь, которую можно полить из одного колодца), соха или плуг (средняя площадь, обработанная за день сохой или плугом) и др.

В XIV—XVI вв. появляются в связи с развитием торговли так называемые объективные единицы измерения величин. В Англии, например, дюйм (длина трех приставленных друг к другу ячменных зерен), фут (ширина 64 ячменных зерен, положенных бок о бок).

В качестве единиц массы были введены гран (масса зерна) и карат (масса семени одного из видов бобов).

Следующий период в развитии единиц величин — введение единиц, взаимосвязанных друг с другом. В России, например, такими были единицы длины миля, верста, сажень и аршин; 3 аршина составляли сажень, 500 саженей — версту, 7 верст — милю.

Однако связи между единицами величин были произвольными, свои меры длины, площади, массы использовали не только отдельные государства, но и отдельные области внутри одного и того же государства. Особый разнобой наблюдался во Франции, где каждый феодал имел право в пределах своих владений устанавливать свои меры. Такое разнообразие единиц величин тормозило развитие производства, мешало научному прогрессу и развитию торговых связей.

Новая система единиц, которая впоследствии явилась основой для международной системы, была создана во Франции в конце XVIII века, в эпоху Великой французской революции. В качестве основной единицы длины в этой системе принимался **метр**[1] — одна сорокамиллионная часть длины земного меридиана, проходящего через Париж.

Кроме метра, были установлены еще такие единицы: **ар** — площадь квадрата, длина стороны которого равна 10 м; **литр** — объем и вместимость жидкостей и сыпучих тел, равный объему куба с длиной ребра 0,1 м; **грамм** — масса чистой воды, занимающая объем куба с длиной ребра 0,01 м.

Были введены также десятичные кратные и дольные единицы, образуемые с помощью приставок: мирна (10^4), кило (10^3), гекто (10^2), дека (10^1), деци (10^{-1}), санти (10^{-2}), милли (10^{-3}).

Единица массы **килограмм** был определен как масса 1 $дм^3$ воды при температуре 4 °С.

Так как все единицы величин оказались тесно связанными с единицей длины метром, то новая система величин получила название **метрической системы мер.**

В соответствии с принятыми определениями были изготовлены платиновые эталоны метра и килограмма: метр представляла линейка с нанесенными на ее концах штрихами, а килограмм — цилиндрическая гиря. Эти эталоны передали на хранение Национальному архиву Франции, в связи с чем они получили названия «архивный метр» и «архивный килограмм».

Создание метрической системы мер было большим научным достижением[2] — впервые в истории появились меры, образующие стройную систему, основанные на образце, взятом из природы, и тесно связанные с десятичной системой счисления.

Но уже скоро в эту систему пришлось вносить изменения.

[1] Слово «метр» происходит от греческого слова métron, что означает «мера».

[2] В создании метрической системы мер принимали крупнейшие ученые того времени — Ж. Лагранж, П. Лаплас, Т. Монж, Ж. Борда и др.

Оказалось, что длина меридиана была определена недостаточно точно. Более того, стало ясно, что по мере развития науки и техники значение этой величины будет уточняться. Поэтому от единицы длины, взятой из природы, пришлось отказаться. Метром стали считать расстояние между штрихами, нанесенными на концах архивного метра, а килограммом — массу эталона архивного килограмма.

Не сразу метрическая система мер получила признание. Даже через 100 лет (в 1875 г.) только 17 государств подписали Метрическую конвенцию «для обеспечения международного единства измерений и усовершенствования метрической системы мер». В настоящее время эта конвенция подписана 60 государствами.

В России метрическая система мер начала применяться наравне с русскими национальными мерами начиная с 1899 года, когда был принят специальный закон, проект которого был разработан выдающимся русским ученым Д. И. Менделеевым. Специальными постановлениями Советского государства был узаконен переход на метрическую систему мер сначала РСФСР (1918 г.), а затем и полностью СССР (1925 г.).

Созданная в XVIII веке, метрическая система мер отвечала уровню развития науки и измерительной техники того времени и, конечно, не могла быть стабильной. С целью укрепления сотрудничества по совершенствованию системы единиц величин в 1921 году было создано Международное бюро мер и весов. Руководит им Международный комитет мер и весов, а законодательным органом является Генеральная конференция по мерам и весам, проводимая один раз в шесть лет.

Бурное развитие науки и производства в XX веке привело к тому, что к 50-м годам возникло множество различных систем единиц, дополняющих и развивающих метрическую систему мер. Со всей остротой встала проблема создания единой универсальной системы единиц величин. Большую работу по ее решению провел Международный комитет мер и весов. Она завершилась принятием в 1960 году XI Генеральной конференцией мер и весов решения о введении Международной системы единиц (СИ)[1].

Упражнения

1. Известно, что в 1967 году в нашей стране было получено 9 млрд. пудов зерна. Сколько это тонн?

(Пуд — единица массы, известная на Руси с древнейших времен; 1 пуд равен 16 кг 380 г.)

2. Среди редчайших драгоценностей, хранящихся в Алмазном фонде СССР, есть такие старинные камни, как «Орлов», масса

[1] Сокращенное наименование Международной системы единиц SI. В русской транскрипции — СИ, что означает «система интернациональная», т. е. «международная», читается раздельно: «эс-и», а не слитно: «си».

его равна 189,62 карата, и «Шах», масса его — 88,7 карата. Какова масса этих драгоценных камней в граммах?

(Карат — единица массы, используемая при взвешивании драгоценных камней и жемчуга; 1 карат равен $2 \cdot 10^{-4}$ кг.)

3. Ширину и внутренний диаметр шины (велосипеда, машины) часто измеряют в дюймах. Ширина и диаметр шины самосвала «БелАЗ» 18,0—32 дюйма. Каковы ширина и диаметр этой шины в сантиметрах?

(Дюйм — единица длины, используемая во многих странах; 1 дюйм равен 2 см 5,4 мм. Девочка ростом в дюйм — Дюймовочка — героиня сказки Андерсена.)

4. Какой спортсмен бежал быстрее: который пробежал 100 ярдов за 9,1 с или тот, который пробежал 100 м за 9,0 с?

(Ярд — английская единица длины; 1 ярд равен 91,44 см.)

5. Моряки всех стран расстояние, пройденное кораблем, измеряют в милях. Одна морская миля равна 1852 м. Выразите в километрах расстояние, равное 320 милям.

107. Международная система единиц

Международная система единиц (СИ) — это единая универсальная практическая система единиц для всех отраслей науки, техники, народного хозяйства и преподавания. Так как потребность в такой системе единиц, являющейся единой для всего мира, была велика, то за короткое время она получила широкое международное признание и распространение во всем мире.

В этой системе семь основных единиц (метр, килограмм, секунда, ампер, кельвин, моль и кандела) и две дополнительные единицы (радиан и стерадиан).

Как известно, единица длины метр и единица массы килограмм входили и в метрическую систему мер. Какие изменения претерпели они, войдя в новую систему? Введено новое определение метра — он рассматривается как расстояние, которое проходит в вакууме плоская электромагнитная волна за $\frac{1}{299\,792\,458}$ долей секунды. Переход на это определение метра вызван ростом требований к точности измерений, а также стремлением иметь такую единицу величины, которая существует в природе и остается неизменной при любых условиях.

Определение единицы массы килограмма не изменилось, по-прежнему килограмм — это масса цилиндра из платино-иридиевого сплава, изготовленного в 1889 году. Хранится этот эталон в Международном бюро мер и весов в г. Севре (Франция).

Третьей основной единицей Международной системы является единица времени секунда. Она намного старше метра.

До 1960 года секунду определяли как $\frac{1}{86\,400}$ часть солнечных суток, т. е. секунда определялась по вращению Земли вокруг своей

оси. Это было сделано с таким расчетом, чтобы сохранить привычные отношения между различными единицами времени. При таком определении в сутках содержится 86 400 с, что составляет 1440 мин, или 24 ч.

В 1960 году Генеральная конференция мер и весов приняла решение о переходе к единице времени, основанной на движении Земли по орбите вокруг Солнца. Секунду определили как $\frac{1}{31556925{,}9747}$ часть года. Новое определение учитывало непостоянство средних солнечных суток и значительно повысило точность ее воспроизведения. Однако и это определение не удовлетворило ученых. В 1967 году секунду определили следующим образом: «Секунда равна 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133». В настоящее время имеется более точное определение секунды.

Вообще развитие науки и техники постоянно вносит свои коррективы в определения единиц величин.

Измерять на практике все длины в метрах, массы в килограммах, время в секундах неудобно. Поэтому из основных единиц образуют другие единицы — кратные и дольные. Кратные единицы в 10, 10^2, 10^3, 10^6, 10^9, 10^{12}, 10^{15}, 10^{18} раз больше основной, а дольные составляют 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}, 10^{-15}, 10^{-18} основной единицы. Названия новых (кратных и дольных) единиц образуются из названий «метр», «грамм», «секунда» и других с помощью приставок, указанных в таблице [1]:

Наименование приставки	Обозначение приставки	Множитель	Наименование приставки	Обозначение приставки	Множитель
мега	М	10^6	санти	с	10^{-2}
кило	к	10^3	милли	м	10^{-3}
гекто	г	10^2	микро	мк	10^{-6}
дека	да	10	нано	н	10^{-9}
деци	д	10^{-1}			

Например, километр — это кратная единица, 1 км $= 10^3 \cdot 1$ м $=$ $= 1000$ м; миллиметр — это дольная единица, 1 мм $= 10^{-3} \cdot 1 =$ $= 0{,}001$ м.

Вообще, для длины кратной единицей являются километр (км), а дольными — сантиметр (см), миллиметр (мм), микрометр (мкм), нанометр (нм). Для массы кратной единицей является мегаграмм (Мг), а дольными — грамм (г), миллиграмм (мг), микрограмм (мкг). Для времени кратной единицей является килосекунда (кс), а дольными — миллисекунда (мс), микросекунда (мкс), наносекунда (нс).

[1] В таблице приведены только приставки, с помощью которых образуются кратные и дольные единицы таких величин, как длина, масса и время.

Величины, которые определяются через длину, массу и время, называют **производными величинами.** Их единицы должны быть согласованы с основными.

Назовем некоторые производные величины и их единицы.

1. Площадь. Единицы площади — квадратный метр ($м^2$), квадратный километр ($км^2$), квадратный дециметр ($дм^2$), квадратный сантиметр ($см^2$), квадратный миллиметр ($мм^2$).

2. Объем, вместимость. Единицы объема — кубический метр ($м^3$), кубический дециметр ($дм^3$), кубический сантиметр ($см^3$), кубический миллиметр ($мм^3$), литр (л), гектолитр (гл), миллилитр (мл).

В СИ литр рассматривается как особое наименование кубического дециметра, т. е. 1 л = 1 $дм^3$.

3. Скорость. Единицы скорости — метр в секунду (м/с), километр в час (км/ч), сантиметр в секунду (см/с).

Единицы величин, применяемые в нашей стране, их наименования, обозначения и правила применения устанавливаются Государственным стандартом (ГОСТом). В соответствии с ним используется Международная система единиц, а также определена группа внесистемных единиц, которые разрешается использовать наряду с единицами СИ. В частности, для массы разрешается применение такой единицы, как тонна (т); для времени — минута (мин), час (ч), сутки (сут), неделя, месяц, год, век; для площади — гектар (га); для температуры — градус Цельсия (°С).

Заметим, что такие единицы, как центнер (для массы) и ар (для площади), изъяты из употребления согласно ГОСТу.

Следует обратить внимание и на правильное употребление терминов, связанных с единицами величин. Эти правила также установлены ГОСТом. Так, вместо термина «единица величины» не допускается применять термин «единица измерения величины», поскольку термин «измерение» определяют через понятие величины и включение слова «измерение» в термин «единица величины» приводит к порочному кругу в определениях. Следовательно, надо говорить и писать: «Метр — единица длины», «Грамм — единица массы», «Час — единица времени».

Упражнения

1. Длина прямоугольника 35 см, а его ширина 0,3 м. Найдите площадь прямоугольника в квадратных дециметрах.

2. Сколько часов провел в школе учащийся, окончивший третий класс, при условии, что в учебном году 210 учебных дней, а в учебном дне 4 урока по 45 мин?

3. Сколько секунд прожил человек, достигший 20-летнего возраста? Считаем, что каждый год содержит 365 суток.

4. Выразите: 1) в квадратных дециметрах 3,2 $м^2$; 2) в кубических сантиметрах 4,1 $м^3$; 3) в километрах в час 8,6 км/с.

5. Какова скорость вертолета, если за 180 с он пролетел 8730 м? Сколько километров пролетит этот вертолет за час?

6. Одно ребро прямоугольного параллелепипеда равно 44 см, другое — на 25% длиннее третьего. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 22 000 $см^3$. Найдите площадь каждой грани.

7. Металлический бак представляет прямоугольный параллелепипед, внутренний размер которого $2,5 \times 1,8 \times 1,4$ м. Сколько литров воды войдет в этот бак?

8. В бассейн входит $9 \cdot 10^5$ л воды. Выразите вместимость бассейна в кубических метрах.

9. Ежегодно на орошение и другие нужды во всем мире забирают из рек 3600 $км^3$ воды. Выразите объем этой воды в литрах.

10. Автобус прошел 250 км и израсходовал 95 л бензина. Найдите расход бензина на один километр пути. В каких единицах можно измерять этот расход?

11. Скорость света $3 \cdot 10^5$ км/с. Какое расстояние пройдет свет за 5 мин?

12. Звук распространяется в воздухе со скоростью 342 м/с. Через сколько секунд человек услышит выстрел охотника, если расстояние между ним и охотником 2,4 км?

§ 18. ДЛИНА, ПЛОЩАДЬ, МАССА, ВРЕМЯ

108. Длина отрезка и ее измерение

Определение. **Длиной отрезка называется положительная величина, определенная для каждого отрезка так, что:**

1) равные отрезки имеют равные длины;

2) если отрезок состоит из конечного числа отрезков, то его длина равна сумме длин этих отрезков.

Рассмотрим процесс измерения длин отрезков. Из множества отрезков выбирают какой-нибудь отрезок e и принимают его за единицу длины. На отрезке a от одного из его концов откладывают последовательно отрезки, равные e, до тех пор, пока это возможно. Если отрезки, равные e, отложились n раз и конец последнего совпал с концом отрезка a, то говорят, что значение длины отрезка a есть натуральное число n, и пишут: $a = ne$. Если же отрезки, равные e, отложились n раз и остался еще остаток, меньший e, то на нем откладывают отрезки равные $e_1 = \frac{1}{10} e$. Если они отложились точно n_1 раз, то тогда $a = n, n_1 e$ и значение длины отрезка a есть конечная десятичная дробь. Если же отрезок e_1 отложился n_1 раз и остался еще остаток, меньший e_1, то на нем откладывают отрезки, равные $e_2 = \frac{1}{100} e$. Если представить этот процесс бесконечно продолженным, то получим, что значение длины отрезка a есть бесконечная десятичная дробь.

Итак, при выбранной единице длина любого отрезка выражается положительным действительным числом.

Верно и обратное: если дано положительное действительное число $n, n_1n_2...$, то, взяв его приближение с определенной точностью и проведя построения, отраженные в записи этого числа, получим отрезок, численное значение длины которого есть дробь $n, n_1n_2...$.

Таким образом, мы доказали одно из основных свойств длин отрезков:

1. ***При выбранной единице длины длина любого отрезка выражается положительным действительным числом, и для каждого положительного действительного числа есть отрезок, длина которого выражается этим числом.***

Заметим, что в тех случаях, когда в результате измерения получается бесконечная десятичная дробь, значение длины отрезка оказывается приближенным, хотя и может быть сколь угодно точным, и его можно представлять в виде обыкновенной дроби.

Докажем еще ряд известных свойств длин отрезков. Будем считать при этом, что длины измеряются с помощью одной и той же единицы длины.

2. ***Если два отрезка равны, то численные значения их длин также равны, и обратно: если численные значения длин двух отрезков равны, то равны и сами отрезки.***

$$a=b \Leftrightarrow m_e(a)=m_e(b).$$

Действительно, если отрезки равны, то, измеряя их длины, мы будем откладывать одно и то же число единиц, равных e, и долей единицы e, значит, численные значения длин равных отрезков совпадут.

Обратно: если численные значения длин двух отрезков равны, то они описывают процесс построения равных отрезков.

3. ***Если данный отрезок есть сумма нескольких отрезков, то численное значение его длины равно сумме численных значений длин отрезков слагаемых, и обратно: если численное значение длины отрезка равно сумме численных значений нескольких отрезков, то и сам отрезок равен сумме этих отрезков.***

$$c=a+b \Leftrightarrow m_e(c)=m_e(a)+m_e(b).$$

Пусть a и b — длины отрезков, а $\frac{p}{n}$ и $\frac{q}{n}$ — их численные значения, т. е. $a=\frac{p}{n}e$, $b=\frac{q}{n}e$. Чтобы получить значение суммы $a+b$, откладываем сначала p отрезков, равных $\frac{1}{n}e$, а потом еще q таких отрезков. В результате получаем, что длина суммы данных отрезков выражается числом $\frac{p}{n}+\frac{q}{n}$:

$$a+b=p\cdot\frac{1}{n}e+q\cdot\frac{1}{n}e=\frac{p}{n}e+\frac{q}{n}e=\left(\frac{p}{n}+\frac{q}{n}\right)e.$$

Обратно: сумма $\frac{p}{n}+\frac{q}{n}$ означает, что отрезок $\frac{1}{n}e$ надо откладывать $p+q$ раз, т. е. получаем отрезок $(p+q)\frac{1}{n}e=p\cdot\frac{1}{n}e+q\cdot\frac{1}{n}e=\frac{p}{n}e+\frac{q}{n}e=a+b$. Следовательно, если численные значения длин отрезков складываются, то складываются и соответствующие отрезки.

4. ***Если длины отрезков a и b таковы, что $b=xa$, где x — положительное действительное число и длина a измерена при помощи единицы e, то, чтобы найти численное значение длины b при единице e, достаточно число x умножить на численное значение длины a при единице e.***

$$b=xa \Leftrightarrow m_e(b)=x\cdot m_e(a).$$

Пусть $b=xa$ и $a=\frac{p}{n}e$. Тогда $b=x\cdot\frac{p}{n}e=\left(x\cdot\frac{p}{n}\right)e$, т. е. $m_e(b)=x\cdot m_e(a)$.

Произведение $x\cdot\frac{p}{n}$ означает, что отрезок e надо откладывать $x\cdot\frac{p}{n}$ раз, т. е. $\left(x\cdot\frac{p}{n}\right)e=x\cdot\frac{p}{n}e=xa=b$.

5. ***При замене единицы длины численное значение длины увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.***

Пусть имеются две единицы длины e и e_1, и пусть $e_1=ke$, т. е. новая единица в k раз больше старой. Если длина отрезка a при единице e имела значение $\frac{p}{n}$, т. е. $a=\frac{p}{n}e$, то при единице e_1 числовое значение длины отрезка a уменьшится в k раз: $a=\frac{p}{n}e=\frac{p}{n}\cdot\frac{1}{k}e_1=\frac{p}{nk}e_1$, а число $\frac{p}{nk}$ в k раз меньше числа $\frac{p}{n}$.

Из доказанных свойств длин отрезков вытекают еще следующие:

6. $a>b \Leftrightarrow m_e(a)>m_e(b)$.
7. $c=a-b \Leftrightarrow m_e(c)=m_e(a)-m_e(b)$.
8. $x=a:b \Leftrightarrow x=m_e(a):m_e(b)$.

Рассмотренные свойства позволяют сравнение длин отрезков и действия над ними сводить к сравнению и действиям над соответствующими численными значениями длин этих отрезков. Например, 12 м $<$ 12,3 м, так как $12<12{,}3$; 7,8 см $+$ 3,2 см $=(7{,}8+3{,}2)$ см $=11$ см; $17\cdot3$ дм $=(17\cdot3)$ дм $=51$ дм.

В начальном курсе математики длины отрезков измеряют, строят отрезки заданной длины, сравнивают длины отрезков, производят над ними действия.

Сравнивая длины отрезков, выполняя сложение, вычитание и



Рис. 156

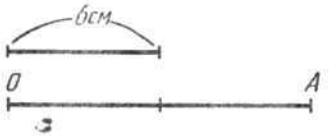


Рис. 157

другие действия над длинами, неявно используют теоретические положения, изложенные в данном пункте.

Так, выполняя задание «Начерти два отрезка: первый длиной 1 дм, а второй на 1 см длиннее», учащиеся неявно пользуются тем, что для каждого положительного числа есть отрезок, длина которого выражается этим числом. Отрезков длиной 1 дм существует бесконечное множество (поэтому каждый ученик и может начертить «свой» отрезок), но все они равны между собой.

Второй отрезок, который на 1 см длиннее первого, можно построить по-разному. Например, на луче OA можно сначала отложить отрезок OB длиной 1 дм, а затем от точки B отложить отрезок BA_1, длина которого 1 см (рис. 156). А можно сначала найти сумму 1 дм + 1 см = 10 см + 1 см = (10 + 1) см = 11 см, а затем построить отрезок длиной 11 см.

Выполнение задания «Начерти два отрезка: длина первого 6 см, а второй в 2 раза длиннее. Чему равна длина второго отрезка?» связано с умножением длины на число. Задание может быть выполнено различными способами.

I способ. Строят отрезок длиной 6 см, а затем на луче OA последовательно откладывают 2 равных отрезка длиной 6 см (рис. 157). Полученный отрезок OA является искомым, его длина равна $2 \cdot 6$ см = 12 см.

II способ. Находят длину второго отрезка: $2 \cdot 6$ см = $(2 \cdot 6)$ см = = 12 см, а затем строят 2 отрезка, один длиной 6 см, а другой длиной 12 см.

Задание «Отрезок длиной 12 см разделить на 2 равные части» предполагает умение делить длину на натуральное число. Мы не выделили такой операции, поскольку деление длины на натуральное число n равносильно умножению ее на дробь $\frac{1}{n}$. В связи с этим деление 12 см на 2 равносильно умножению 12 см на $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} \cdot 12 \text{ см} = \left(\frac{1}{2} \cdot 12\right) \text{ см} = (12:2) \text{ см}.$$

Вообще деление длины на натуральное число сводится к делению численного ее значения на данное натуральное число.

Упражнения

1. Известно, что расстояние от пункта A до пункта B равно 6 км, от B до C 8 км. Чему может быть равно расстояние от A до C?

2. Существуют ли три точки A, B и C, такие, что
1) $AC = 15$ см, $AB = 8$ см, $BC = 7$ см;
2) $AC = 8$ см, $AB = 25$ см, $BC = 40$ см;
3) $AC = 24$ см, $AB = 30$ см, $BC = 40$ см?

3. На прямой отметьте точки A, B, C и D так, чтобы расстояние от A до B равнялось 2 см, расстояние от B до C — 1,5 см, от C до D — 1 см. Найдите длины отрезков AB, AD, BC, CD, если за единичный отрезок принять:
1) отрезок CD; 2) отрезок AB; 3) отрезок BC; 4) отрезок AD.

4. Расстояние от дома до школы 400 м, а расстояние от дома до вокзала 0,9 км. Во сколько раз расстояние от дома до вокзала больше расстояния от дома до школы?

5. Длину стола измеряли сначала в сантиметрах, потом в дециметрах. В первом случае получили число на 108 большее, чем во втором. Чему равна длина стола?

6. Численное значение длины отрезка, измеренной при помощи единицы e_1, равно 6, а измеренной при помощи единицы e_2 — равно 4. В каком отношении находятся между собой единицы длины e_1 и e_2?

7. Постройте отрезок, длина которого 4,6 e. Каким будет численное значение длины этого отрезка, если единицу длины e:
1) увеличить в 3 раза; 2) уменьшить в 1,5 раза?

8. Какие действия над длинами будут выполнять учащиеся начальных классов при решении следующих задач:
1) Начерти квадрат со стороной 5 см. Найди сумму длин всех сторон этого квадрата.
2) Сумма длин всех сторон квадрата 28 см. Чему равна длина стороны этого квадрата?
3) На детскую простыню идет 2 м полотна, а на пододеяльник — в 2 раза больше, чем на простыню. Сколько полотна пойдет на 8 комплектов, состоящих из одной простыни и одного пододеяльника?
4) В одном куске было 24 м ткани, а в другом — на 8 м меньше. Из всей этой ткани сшили несколько одинаковых платьев, расходуя на каждое по 4 м ткани. Сколько сшили платьев?
5) За три дня турист проехал 3220 км. В первый день он проехал четвертую часть всего пути, во второй день 1920 км, а в третий день остальной путь. Сколько километров проехал турист в третий день?
6) Отрезок длиной 6 см увеличили в несколько раз и получили отрезок длиной 18 см. Во сколько раз увеличили отрезок?

109. Площадь фигуры и ее измерение

Понятие о площади фигуры имеет любой человек: мы говорим о площади комнаты, площади земельного участка, о площади поверхности, которую надо покрасить, и т. д. При этом мы понимаем, что если земельные участки одинаковы, то площади их равны; что у большего участка площадь больше; что площадь квартиры слагается из площади комнат и площади других ее помещений.

Это обыденное представление о площади используется при ее определении в геометрии, где говорят о площади фигуры. Но геометрические фигуры устроены по-разному, и поэтому, когда говорят о площади, выделяют особый класс фигур. Например, рассматривают площади многоугольников и других ограниченных выпуклых фигур, или площадь круга, или площадь поверхности тел вращения и т. д. Мы будем говорить только о площади многоугольников и ограниченных выпуклых плоских фигур. Такая фигура может быть составлена из других. Например, фигура F, изображенная на рисунке 158, составлена из фигур F_1, F_2 и F_3. Говоря, что фигура составлена (состоит) из фигур F_1, F_2, ..., F_n, имеют в виду, что она является их объединением и любые две данные фигуры не имеют общих внутренних точек.

Определение. **Площадью фигуры называется неотрицательная величина, определенная для каждой фигуры так, что:**

1) равные фигуры имеют равные площади;

2) если фигура составлена из конечного числа фигур, то ее площадь равна сумме их площадей.

Если сравнить данное определение с определением длины отрезка, то увидим, что площадь характеризуется теми же свойствами, что и длина, но заданы они на разных множествах: длина — на множестве отрезков, а площадь — на множестве плоских фигур.

Условимся площадь фигуры F обозначать $S(F)$.

Чтобы измерить площадь фигуры, нужно иметь единицу площади. Как правило, за единицу площади принимают площадь квадрата со стороной, равной единичному отрезку e, т. е. отрезку, выбранному в качестве единицы длины. Площадь квадрата со стороной e обозначают e^2. Например, если длина стороны единичного квадрата m, то его площадь m^2.

Измерение площади состоит в сравнении площади данной фигуры с площадью единичного квадрата e^2. Результатом этого сравнения является такое число x, что $S(F)=xe^2$. Число x называют **численным значением площади** при выбранной единице площади.

Так, если единицей площади является $см^2$, то площадь фигуры, приведенной на рисунке 159, равна 5 $см^2$.

Рассмотрим некоторые приемы измерения площадей фигур.

Одним из приемов, опирающихся непосредственно на определение площади, является измерение площади при помощи палетки — сетки квадратов, нанесенной на прозрачный материал.

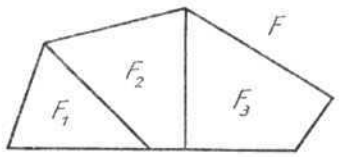


Рис. 158

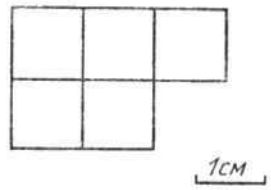


Рис. 159

Допустим, что на фигуру F, площадь которой надо измерить (рис. 160), наложена сетка квадратов со стороной e. Тогда по отношению к этой фигуре можно выделить квадраты двух видов:

1) квадраты, которые целиком лежат внутри фигуры F;

2) квадраты, через которые проходит контур фигуры и которые лежат частью вне, частью внутри фигуры F.

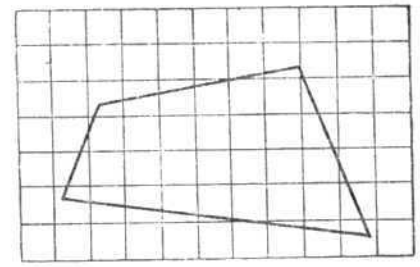


Рис. 160

Пусть квадратов первого вида окажется m, а квадратов второго вида — n. Тогда, очевидно, площадь фигуры F будет удовлетворять условию $me^2<S(F)<(m+n)e^2$. Числа m и $m+n$ будут приближенными численными значениями измеряемой площади: первое число с недостатком, второе — с избытком.

Как видим, такая палетка позволяет измерить площадь фигуры F лишь с невысокой точностью. Чтобы получить более точный результат, можно уплотнить первоначальную сеть квадратов, разделив каждый из них на более мелкие квадраты. Можно, например, построить сеть квадратов со стороной $e_1=\frac{1}{10}e$. В результате мы получим другие приближенные значения площади фигуры F, причем с большей точностью.

Описанный процесс можно продолжить. Возникает вопрос: существует ли такое действительное число, которое больше всякого приближенного результата измерения, взятого с недостатком, и меньше всякого приближенного результата измерения, взятого с избытком, и которое может быть точным численным значением измеряемой площади? В математике доказано, что при выбранной единице площади такое число существует для всякой площади, оно единственно и удовлетворяет свойствам 1 и 2, указанным в определении площади.

Прием измерения площадей фигур при помощи палетки имеет ограниченное применение, его можно использовать лишь для небольших площадей, он громоздок по исполнению. Поэтому в математике с момента ее возникновения шел поиск косвенных путей измерения площади посредством измерения длин сторон, высот и других отрезков, принадлежащих фигуре. Например, численное значение площади прямоугольника находят, перемножив численные значения длин его сторон.

Из определения площади и сути ее измерения вытекают известные правила сравнения площадей и действий над ними. Рассмотрим некоторые из них.

1. Если фигуры равны, то равны численные значения их площадей (при одной и той же единице площади).

Фигуры, у которых площади равны, называют **равновеликими.**

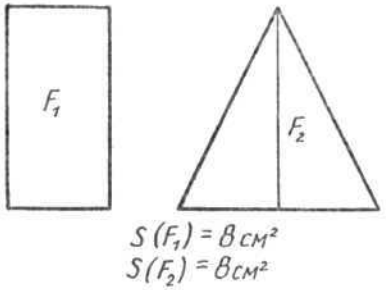


Рис. 161

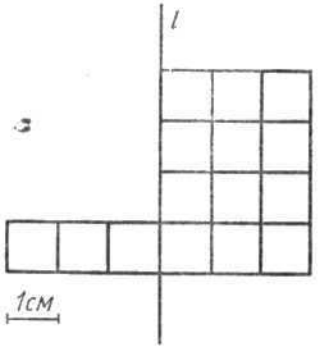


Рис. 162

Например, прямоугольник и треугольник на рисунке 161 равновелики.

2. Если фигура F составлена из фигур F_1, F_2, ..., F_n, то численное значение площади фигуры F равно сумме численных значений площадей фигур F_1, F_2, ..., F_n (при одной и той же единице площади).

Найдем, например, площадь фигуры F, изображенной на рисунке 162. Эту фигуру можно рассматривать как составленную из двух прямоугольников F_1 и F_2 (это разбиение фигуры F образовано при помощи прямой l). Тогда $S(F)=S(F_1)+S(F_2)=3$ см $\cdot 1$ см $+$ $+3$ см $\cdot 4$ см $=3$ см$^2+12$ см$^2=(3+12)$ см$^2=15$ см^2.

3. При замене единицы площади численное значение площади увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.

Выразим, например, 5 см^2 в квадратных дециметрах. Известно, что 1 см$^2=0{,}01$ дм^2, и, следовательно, 5 см$^2=5\cdot 1$ см$^2=5\cdot(0{,}01$ дм$^2)=$ $=(5\cdot 0{,}01)$ дм$^2=0{,}05$ дм^2.

В начальных классах происходит первоначальное знакомство учащихся с понятием площади фигуры. Представление о площади фигуры формируется на основе сравнения фигур: так как квадрат помещается внутри круга (рис. 163), то его площадь меньше площади круга, а площадь круга больше площади квадрата.

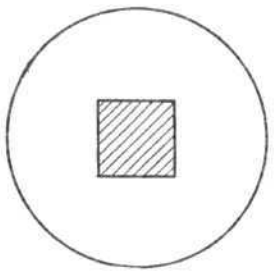


Рис. 163

Учащиеся знакомятся с приемом измерения площадей фигур при помощи палетки — сети квадратов со стороной 1 см. Наложив палетку на фигуру, учащиеся определяют:

1) число квадратов, которые целиком лежат внутри фигуры;

2) число квадратов, через которые проходит контур фигуры.

Если, например, оказалось, что первых квадратов 26, а вторых 18, то число квадратов, через которые проходит контур фигуры, т. е. число 18, делят пополам и прибавляют эту половину к числу квадратов, целиком содержащихся внутри фигуры. В результате получают численное значение площади данной фигуры: $26+18:2\approx 26+9=35$. Значит, $S(F)=35$ см^2.

Почему так производят вычисления?

Пусть m — число квадратов, которые целиком лежат внутри фигуры F, а n — число квадратов, через которые проходит контур фигуры F. Тогда $me^2<S(F)<(m+n)e^2$.

Чтобы найти приближенное значение площади фигуры F, достаточно сложить полученные численные значения площади по недостатку и по избытку и разделить эту сумму пополам $S(F)\approx\frac{m+(m+n)}{2}e^2$. После преобразования получим $S(F)\approx$ $\approx\frac{m+(m+n)}{2}e^2=\frac{2m+n}{2}e^2=\left(m+\frac{n}{2}\right)e^2$. Последнее выражение означает, что приближенное значение площади фигуры F равно сумме числа квадратов, которые целиком лежат внутри фигуры F, и половине числа квадратов, через которые проходит контур этой фигуры,— пришли к школьному правилу определения приближенного численного значения площади фигуры при помощи палетки.

Численное значение площади прямоугольника учащиеся начальных классов находят сначала, непосредственно подсчитывая число единичных квадратов, лежащих внутри этого прямоугольника, или используя палетку, а затем используют косвенный способ — перемножают численные значения длин сторон прямоугольника.

Упражнения

1. Докажите, что если фигура F_1 содержится в фигуре F_2, то $S(F_1)\leqslant S(F_2)$. При доказательстве используйте свойства площади фигуры, содержащиеся в определении.

2. На рисунке 164 $F=F_1$, $P=P_1$ и $S(F)=3$ см^2, $S(P)=2$ см^2. Докажите, используя свойства площади, что $S(H)=5$ см^2.

3. Площадь фигуры F равна сумме площадей фигур F_1 и F_2? Значит ли это, что фигура составлена из фигур F_1 и F_2?

4. Два треугольника имеют равные площади. Следует ли из этого, что они равны?

5. Площадь фигуры F_1 больше площади фигуры F_2. Следует ли из этого, что фигура F_2 целиком содержится в фигуре F_1?

6. На фигуру F наложили палетку и подсчитали, что внутри фигуры F помещается фигура, составленная из 28 единичных квадратов, а фигура F укладывается внутри фигуры, состоящей

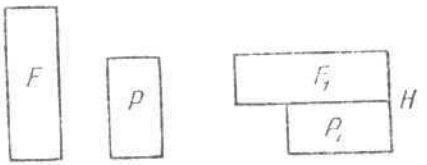


Рис. 164

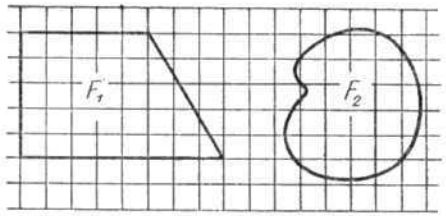


Рис. 165

из 35 единичных квадратов. Может ли численное значение площади данной фигуры F быть равным 27, 3? 29, 6? 32, 8? 35, 4?

7. Найдите площади фигур, на которые наложена палетка (рис. 165), при условии, что длина стороны квадрата палетки: 1) 1 см; 2) 0,5 см.

8. Начертите круг радиуса 2 см на миллиметровой бумаге и оцените площадь этого круга с помощью двойного неравенства, подсчитывая: 1) квадраты со стороной 1 см; 2) квадраты со стороной 0,5 см; 3) квадраты со стороной 0,1 см.

Вычислите площадь этого круга по формуле $S=\pi r^2$, приняв $\pi=3{,}14$.

9. Среди следующих высказываний укажите истинные:

1) Числовые значения площади одной и той же фигуры могут быть различными.

2) Числовые значения площадей неравных фигур могут быть равными.

3) Равновеликие фигуры равны.

10. Докажите, что в одном квадратном дециметре содержится 100 квадратных сантиметров.

11. Известно, что $S(F)=34{,}78$ см^2. Каким будет численное значение этой площади, если ее измерять в квадратных дециметрах?

12. Площадь кухни 9 м^2. Сколько плиток линолеума, имеющих форму квадрата со стороной 3 дм, нужно для покрытия пола в кухне?

13. Площадь прямоугольника равна 12 см^2, длины его сторон выражаются натуральными числами. Сколько различных прямоугольников можно построить согласно этим условиям?

14. Длины двух неравных сторон прямоугольника выражаются иррациональными числами. Следует ли из этого, что значение площади данного прямоугольника будет также иррациональным числом?

15. Может ли прямоугольник, длины сторон которого выражаются иррациональными числами, быть равновеликим прямоугольнику, длины сторон которого выражаются числами рациональными?

16. Докажите, что если основание прямоугольника увеличить в 2 раза, а высоту уменьшить в 2 раза, то площадь прямоугольника не изменится.

Верен ли будет этот вывод в том случае, если основание прямоугольника увеличить на 20%, а высоту уменьшить на 20%?

17. Решите нижеприведенные задачи и объясните, какие операции над площадями были при этом выполнены:

1) Площадь прямоугольника в 3 раза больше площади квадрата. Длина прямоугольника 96 см. Чему равна ширина прямоугольника, если сторона квадрата 48 см?

2) Общая площадь двух земельных участков прямоугольной формы равна 7,4 га. Длина первого участка 250 м, длина второго 150 м. Найдите площадь каждого участка, если ширина первого участка на 40 м больше ширины второго участка.

3) Если длину прямоугольника увеличить на 2 дм, а ширину уменьшить на 5 дм, то получится квадрат, площадь которого будет меньше площади прямоугольника на 50 дм^2. Определите площадь квадрата.

4) Площадь одной стены комнаты равна 14 м^2 90 дм^2, а смежной стены — 9 м^2 80 дм^2. В комнате имеется окно площадью 3 м^2 50 дм^2 и дверь площадью 2 м^2 20 дм^2. Кроме того, десятая часть стен под потолком не оклеивается обоями. Какую площадь займут обои?

110. Масса тела и ее измерение

Масса — одна из основных физических величин. Понятие массы тела тесно связано с понятием веса — силы, с которой тело притягивается Землей. Поэтому вес тела зависит не только от самого тела. Например, он различен на различных широтах: на полюсе тело весит на 0,5% больше, чем на экваторе. Однако при своей изменчивости вес обладает особенностью: отношение весов двух тел в любых условиях остается неизменным. При измерении веса тела путем сравнения его с весом другого выявляется новое свойство тел, которое называется **массой**.

Представим, что на одну из чашек рычажных весов положили какое-нибудь тело a. На другую чашку положили второе тело b. При этом возможны случаи:

1) вторая чашка весов опустилась, а первая поднялась так, что они оказались в результате на одном уровне; в этом случае говорят, что весы находятся в равновесии, а тела a и b имеют равные массы;

2) вторая чашка весов так и осталась выше первой; в этом случае говорят, что масса тела a больше массы тела b;

3) вторая чашка опустилась, а первая поднялась и стала выше второй; в этом случае говорят, что масса тела a меньше массы тела b.

Заметим, что если тело взвесили на рычажных весах на экваторе, а затем тело и гири перенесли на полюс, то взвешивание на полюсе даст тот же результат, что на экваторе, поскольку и тело и гири изменяют свой вес одинаково. Таким образом, масса тела не изменяется, она одна и та же, где бы тело ни находилось.

С математической точки зрения **масса — это такая положительная величина, которая обладает свойствами:**

1) масса одинакова у тел, уравновешивающих друг друга на весах;

2) масса складывается, когда тела соединяются вместе: масса нескольких тел, вместе взятых, равна сумме их масс.

Если сравнить данное определение массы с определениями длины и площади, то увидим, что масса характеризуется теми же свойствами, что и длина и площадь, но задана она на множестве физических тел.

Измерение массы производится с помощью весов. Происходит это следующим образом. Выбираем тело e, масса которого принимается за единицу. Предполагается, что можно взять и доли этой массы. Например, если за единицу массы взят килограмм, то в процессе измерения можно использовать и такую его долю, как грамм: $1\ \text{г} = \frac{1}{1000}$ кг.

На одну чашку весов кладут тело, массу которого измеряют, а на другую — тела, выбранные в качестве единицы массы, т. е. гири. Этих гирь должно быть столько, чтобы они уравновесили первую чашку весов. В результате взвешивания получается численное значение массы данного тела при выбранной единице массы. Это значение приближенное. Например, если масса тела равна 5 кг 350 г, то число 5350 следует рассматривать как приближенное значение массы данного тела (при единице массы — грамм).

Для численных значений массы справедливы все утверждения, сформулированные для длины, т. е. сравнение масс, действия над ними сводятся к сравнению и действиям над численными значениями масс (при одной и той же единице массы).

Основная единица массы — **килограмм.** Из этой основной единицы образуются другие единицы массы: грамм, тонна и пр.

Упражнения

1. Выразите:

1) в килограммах 3 кг 720 г; 2) в граммах 21 кг 530 г.

2. Масса Земли равна $5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг. Выразите эту массу в тоннах.

3. Сравните массы:

1) $2\frac{1}{7}$ кг и 2 кг 140 г; 2) 750 г и $\frac{5}{8}$ кг.

4. Сложите массы:

1) $17\frac{2}{5}$ кг + 2 кг 600 г; 2) 630 г + $1\frac{1}{2}$ кг.

5. На одну чашку весов положили кусок мыла, а на другую — $\frac{3}{4}$ такого же куска и еще 50 г. Весы находятся в равновесии. Какова масса куска мыла?

6. Имеется 9 кг крупы и гири в 200 г и 50 г. Каким образом в три приема взвесить на весах 2 кг крупы?

7. Решите следующие задачи арифметическим способом и объясните, какие операции над массами были при этом выполнены:

1) В типографию привезли 12 т бумаги. В первый день израсходовали 3 т, а во второй — третью часть остатка. Сколько бумаги израсходовали за два дня?

2) Купили 6 кг 500 г краски. На окраску окон пошла пятая часть всей краски, на окраску комнаты — в 2 раза больше, чем на окраску окон, а на кухню краски пошло на 800 г меньше, чем на окраску комнаты. Сколько краски осталось?

8. Решите алгебраическим способом:

1) За три дня класс собрал 150 кг макулатуры. В первый день было собрано на 10 кг больше, чем во второй, а в третий $\frac{2}{3}$ того, что собрали в первый. Сколько килограммов макулатуры собрали в каждый из трех дней?

2) За три дня продали 1400 кг картофеля. В первый день продали на 100 кг меньше, чем во второй, а в третий $\frac{3}{5}$ того, что продали в первый. Сколько килограммов картофеля продали в каждый из трех дней?

111. Промежутки времени и их измерение

Понятие времени более сложное, чем понятие длины и массы. В обыденной жизни время — это то, что отделяет одно событие от другого. В математике и физике время рассматривают как скалярную величину, потому что промежутки времени обладают свойствами, похожими на свойства длины, площади, массы.

Промежутки времени можно сравнивать. Например, на один и тот же путь пешеход затратит больше времени, чем велосипедист.

Промежутки времени можно складывать. Так, лекция в институте длится столько же времени, сколько два урока в школе.

Промежутки времени можно вычитать, умножать на положительное действительное число.

Промежутки времени измеряют. Но процесс измерения времени отличается от измерения длины. Для измерения длины можно многократно использовать линейку, перемещая ее от точки к точке. Промежуток времени, принятый за единицу, может быть использован лишь один раз. Поэтому единицей времени должен быть регулярно повторяющийся процесс. Такой единицей в Международной системе единиц названа секунда. Наряду с секундой используются

и другие единицы времени: минута, час, сутки, год, неделя, месяц, век. Такие единицы, как год и сутки, были взяты из природы, а час, минута, секунда придуманы человеком.

Год — это время обращения Земли вокруг Солнца. Сутки — время обращения Земли вокруг своей оси. Год состоит приблизительно из $365\frac{1}{4}$ сут. Но год жизни людей складывается из целого числа суток. Поэтому вместо того, чтобы к каждому году прибавлять 6 ч, прибавляют целые сутки к каждому четвертому году. Этот год состоит из 366 дней и называется високосным.

Календарь с таким чередованием лет ввел в 46 году до н. э. римский император Юлий Цезарь в целях упорядочивания существующего в то время очень запутанного календаря. Поэтому новый календарь называется юлианским. Согласно ему новый год начинается с 1 января и состоит из 12 месяцев. Сохранилась в нем и такая мера времени, как неделя, придуманная еще вавилонскими астрономами.

В Древней Руси неделя называлась седмицей, а воскресенье — днем недельным (когда нет дел) или просто неделей, т. е. днем отдыха. Теперь в русском языке день отдыха называется воскресенье — от слова «воскрешать», т. е. придавать силы, оживить. Названия следующих пяти дней недели указывают, сколько дней прошло после воскресенья. Понедельник — сразу после недели, вторник — второй день, среда — середина, четверг и пятница — четвертые и пятые сутки, суббота — конец дел.

Месяц не очень определенная единица времени, он может состоять из тридцати одного, тридцати и двадцати восьми (двадцати девяти в високосные годы) дней. Но существует эта единица времени с древних времен и связана с движением Луны вокруг Земли. Один оборот вокруг Земли Луна делает примерно за 29,5 сут, и за год она совершает примерно 12 оборотов. Эти данные и послужили основой для создания древних календарей, а результатом их многовекового усовершенствования является тот календарь, который используется в настоящее время.

Вернемся к юлианскому календарю. Этот календарь, принятый христианской церковью, распространился среди всех европейских народов и просуществовал более 16 столетий.

Но постепенно люди стали замечать, что результаты измерения времени по календарю не сходятся с результатами измерений по Солнцу. Например, 21 марта — день весеннего равноденствия в XVI веке пришелся на 11 марта по календарю. Откуда взялась эта разница в 10 дней? Они накапливались постепенно, из года в год, поскольку год по юлианскому календарю на 11 мин 14 с больше солнечного и за 400 лет набегало примерно трое с лишним суток. Чтобы в дальнейшем расхождения не возникало, в новом григорианском календаре, названном в честь тогдашней главы католической церкви папы Григория XIII и принятом в 1582 году, было уменьшено число високосных лет. По юлианскому календарю високосными были все годы, число которых делилось на 4. По григорианскому из их числа исключались те, которые были «вековыми» и не делились на 400: например, 1600 год — високосный, а 1700, 1800 и 1900 из числа високосных исключались, они содержали по 365 суток. Заглядывая вперед, скажем, что 2000 год будет високосным, а 2100, 2200, 2300 нет.

Этот календарь был принят в европейских странах. В России до Великой Октябрьской социалистической революции православная церковь отклоняла эту реформу. Здесь жили по юлианскому календарю, что причиняло многие неудобства. Например, телеграмма из-за границы приходила в Россию на 13 дней раньше, чем была отправлена. Много раз русские ученые пытались заставить царское правительство изменить старый календарь, но только декретом Советского правительства 14 февраля 1918 года у нас был введен новый стиль. В соответствии с этим декретом февраль 1918 был укорочен на 13 дней. После 31 января наступило сразу 14 февраля. С тех пор мы и живем по новому стилю.

Заметим, что если юлианский календарный год длиннее солнечного на $11\frac{1}{4}$ мин, то григорианский всего на 26 с. Лишние сутки накопятся только в 50-м веке н. э.

Григорианский календарь принят не всеми государствами мира. Например, Египет и другие страны Востока пользуются другим календарем — лунным. Год по этому календарю равен 12 лунным месяцам и короче солнечного на 11 дней. Кроме того, если по григорианскому календарю 1986 год, то, например, в Иране это 1406 год. Чем это вызвано?

Чтобы вести счет, надо иметь начало отсчета. У времени нет начала и нет конца. Оно течет и течет. Поэтому, чтобы считать, нужно самим установить начало счета. Установить начало суток, года можно разными способами. Так, древние египтяне вели летоисчисление по годам правления фараонов, китайцы — по годам царствования и династиям императоров, римляне — от основания города Рима и от первого года царствования того или иного императора, другие народы — от мифического «сотворения мира» или от «рождения Христа».

В Древней Руси год начинался весной, в марте, когда приступали к полевым работам. С введением христианства на Руси был принят юлианский календарь и начало летоисчисления от «сотворения мира», причем это «сотворение мира» христианская церковь приурочила к 5508 году до «рождества Христова», а началом года считала 1 сентября. Такой отсчет лет велся на Руси до начала XVIII столетия. Указом Петра I Русское государство перешло на другое летоисчисление: началом года стало 1 января, а года стали считать не от «сотворения мира», а от «рождества Христова». В соответствии с ним год принятия указа 7208 стал 1700 годом. Счет лет от рождения мифического Христа в настоящее

время принят большинством государств и называется нашей эрой (н. э.).

Современное деление суток на 24 ч также восходит к глубокой древности, оно было введено в Древнем Египте. Минута и секунда появились в Древнем Вавилоне, а в том, что в часе 60 мин, а в минуте 60 с, сказывается влияние шестидесятеричной системы счисления, изобретенной вавилонскими учеными.

Упражнения

1. Луна совершает полный оборот вокруг Земли за 29 сут 12 ч 44 мин 3 с. Выразите этот промежуток времени в секундах.

2. Постройка дома была начата 12 марта и закончена 7 декабря того же года. Сколько дней строился дом?

3. Знаменитый греческий математик Архимед умер в 212 г. до н. э. Сколько веков и сколько лет прошло со дня смерти Архимеда?

4. В 1956 г. исполнилось 2000 лет со времени введения юлианского календаря (старый стиль) и 374 года со времени введения григорианского календаря (новый стиль). В каком году был введен старый стиль и в каком году новый стиль?

5. Выполните действия:

1) сложите 5 лет 7 мес 8 дней и 3 года 2 мес 4 дня;
2) из 5 ч 36 с вычтите 45 мин 40 с;
3) 7 ч 48 мин 56 с умножьте на 18;
4) 9 нед 21 ч 52 мин разделите на 1 нед 23 ч 44 мин.

6. Решите арифметическим и алгебраическим способами:

1) Машинистка должна была перепечатать рукопись за 8 дней. Однако она выполнила работу за 6 дней, так как печатала ежедневно на 6 страниц больше, чем планировала ранее. Сколько страниц в рукописи?

2) Из совхоза до ремонтной мастерской велосипедист ехал со скоростью 12 км/ч, а возвращался со скоростью 15 км/ч, поэтому затратил на обратный путь на 18 мин меньше. Сколько километров от совхоза до ремонтной мастерской?

112. Зависимости между величинами

Понятие величины, принимающей различные численные значения, является отражением изменяемости окружающей нас действительности. Но всевозможные изменения в реальном мире не происходят не зависимо друг от друга. Изучение этих связей посредством изучения зависимостей между величинами является способом применения математики для решения практических задач, способом математизации знаний.

Зависимости между величинами многообразны. Их изучают различные науки. Мы будем говорить в основном о тех, с которыми встречаются учащиеся в начальном курсе математики.

Рассмотрим величины, связанные с равномерным прямолинейным движением: время, скорость и расстояние. Зависимость между временем (t), скоростью (v) и расстоянием (s), пройденным телом при прямолинейном равномерном движении, может быть выражена формулой $s=v\cdot t$.

Если движение таково, что скорость принимает одно и то же значение, то зависимость пройденного расстояния от времени прямо пропорциональная, так как выражается формулой вида $y=kx$. Переменная x есть время движения, а переменная y — пройденное расстояние. Коэффициент k обозначает скорость движения. Прямо пропорциональная зависимость между временем и пройденным расстоянием обладает свойством: во сколько раз увеличивается (уменьшается) время движения, во столько же раз увеличивается (уменьшается) пройденное расстояние.

Зависимость расстояния прямолинейного равномерного движения от времени (при постоянной скорости) может быть и линейной, т. е. она может выражаться формулой вида $y=kx+b$, где k и b — некоторые данные числа.

Рассмотрим в качестве примера такую задачу: «Туристы за день прошли пешком 18 км, а остальной путь проехали на автобусе со скоростью 45 км/ч. Какой путь проделали туристы за день, если на автобусе они ехали 2 ч? 3 ч? 4ч?»

Если туристы на автобусе ехали 2 ч, то всего за день они проделали путь $s=18$ км $+45$ км/ч $\cdot 2$ ч $=18$ км $+90$ км $=108$ км.

Если они ехали на автобусе 3 ч, то всего за день они проделали путь $s=18$ км $+45$ км/ч $\cdot 3$ ч $=153$ км. За 4 ч они проделали путь $s=18$ км $+45$ км/ч $\cdot 4=208$ км.

Видим, что зависимость между временем и пройденным расстоянием линейная, так как она может быть представлена формулой вида $s=v\cdot t+s_0$, где $s_0=18$ км, а $v=45$ км/ч.

Если среди величин s, v и t две величины — скорость и время — принимают различные значения, а расстояние постоянно, то зависимость между скоростью и временем движения обратно пропорциональная, так как может быть выражена формулой $y=\frac{k}{x}$, где переменная x есть скорость движения, переменная y — время движения (или наоборот), постоянная k есть расстояние, которое надо пройти телу.

Обратно пропорциональная зависимость между скоростью и временем движения обладает свойством: во сколько раз увеличивается (уменьшается) скорость движения, во столько же раз уменьшается (увеличивается) время, затраченное на движение.

Знание зависимости между величинами, данными в текстовой задаче, позволяет находить различные способы ее решения. Рассмотрим, например, задачу: «Из двух городов выехали навстречу друг другу два мотоциклиста. Один мотоциклист двигался со ско-

ростью 90 км/ч и проехал до встречи 180 км. Какое расстояние проехал до встречи другой мотоциклист, если он двигался со скоростью 45 км/ч?»

В задаче речь идет о движении мотоциклистов. Оно характеризуется тремя величинами: скоростью, временем и расстоянием. Согласно условию задачи значения времени движения одинаковы, а скорость и расстояние принимают различные значения. Зависимость между этими последними величинами может быть выражена формулой $s=t\cdot v$, значит, s и v — величины прямо пропорциональные.

Задача может быть решена двумя арифметическими способами.

I способ сводится к отысканию коэффициента t — времени движения мотоциклистов. Зная его и скорость движения второго мотоциклиста, нетрудно найти и расстояние, пройденное им. Чтобы найти время движения мотоциклистов, разделим расстояние, пройденное первым мотоциклистом, на скорость движения: 180 км: 90 км/ч = 2 ч. Умножив скорость второго мотоциклиста на время его движения, получим путь, пройденный им: 45 км/ч · 2 ч = 90 км.

II способ решения этой же задачи основан на свойстве прямой пропорциональности: найдем, во сколько раз скорость движения второго мотоциклиста меньше скорости движения первого: 90 км/ч : 45 км/ч = 2 раза. Значит, и путь, пройденный вторым мотоциклистом, в 2 раза меньше пути, пройденного первым:

180 км : 2 = 90 км.

Рассмотрим еще такую задачу: «Скорость машины 60 км/ч, скорость велосипедиста в 5 раз меньше. Велосипедист проехал расстояние от своего села до железнодорожной станции за 2 ч. За сколько минут можно проехать это расстояние на машине?»

В задаче речь идет о трех величинах: скорости, времени и расстоянии. Две из них — скорость и время — принимают различные значения, а третья величина — расстояние — постоянна. Зависимость между скоростью и временем обратно пропорциональна, так как может быть выражена формулой $t=\frac{s}{v}$.

I способ решения этой задачи сводится к отысканию коэффициента s, т. е. расстояния от села до железнодорожной станции. Зная его и скорость движения машины, можно будет найти и время ее движения.

Найдем сначала скорость велосипедиста: 60 км/ч : 5 = 12 км/ч, а затем расстояние от села до станции: 12 км/ч · 2 ч = 24 км — и, наконец, время, за которое машина пройдет 24 км: 24 км : 60 км/ч = $=\frac{2}{5}$ ч $=\frac{2}{5}\cdot 60$ мин $=24$ мин.

Можно было поступить иначе, выразив скорость движения машины в другой единице — км/мин. Так как 1 км/ч $=\frac{1}{60}$ км/мин, то

60 км/ч $=60\cdot\frac{1}{60}$ км/мин $=1$ км/мин. И значит, 24 км : 1 км/мин $=$ $=24$ мин.

II способ решения этой задачи основан на свойстве обратной пропорциональности: поскольку скорость машины в 5 раз больше скорости велосипедиста, то времени для машины надо в 5 раз меньше, т. е. 2 ч $=2\cdot 60$ мин $=120$ мин и 120 мин : 5 $=24$ мин.

Аналогичные зависимости существуют и между другими величинами, рассматриваемыми в начальных классах. Например, такими, как:

а) стоимость товара, его количество и цена;

б) объем работы, время работы и производительность труда;

в) количество ткани, количество изделий и расход на одно изделие.

Упражнения

1. Установите, какие величины рассматриваются в задаче, какая между ними существует зависимость, и решите ее различными арифметическими способами:

1) За одно и то же время теплоход «Метеор» прошел 216 км, а пароход 72 км. Чему равна скорость «Метеора», если скорость парохода 24 км/ч?

2) На 10 к. купили 2 одинаковых конверта. Сколько стоят 6 таких конвертов?

3) Из 20 м ткани сшили 5 платьев. Сколько можно сшить из этой ткани кофт, если расходовать на каждую из них в 2 раза меньше ткани, чем на платье?

4) 12 кг варенья разложили в 6 банок поровну. Сколько надо таких банок, чтобы разложить 24 кг варенья?

5) Рабочему поручено изготовить за 10 ч 30 деталей. Но рабочий, экономя время, успевал делать одну деталь за 15 мин. Сколько деталей сверх задания сделал рабочий за счет сэкономленного времени?

2. Решите арифметическим и алгебраическим способами:

1) Из города A в город B вышла грузовая машина, а спустя 2 ч из города B в город A вышла легковая машина. Грузовая машина проходит в среднем по 42 км/ч, а легковая — по 65 км/ч. На каком расстоянии от города B встретятся машины, если между городами A и B 619 км?

2) Для детского сада на 16 р. 56 к. куплены яблоки по 72 к. и груши по 80 к. за килограмм. За яблоки заплачено на 2 р. 16 к. больше, чем за груши. Сколько было куплено яблок и сколько груш?

3) За книгу, ручку и линейку уплатили 1 р. 55 к. Сколько стоит каждая вещь, если известно, что ручка на 30 к. дороже линейки, а книга на 65 к. дороже ручки.

3. Решите методом составления уравнения:

1) Бригада рабочих должна изготовить 360 деталей. Изготовляя ежедневно на 4 детали больше, чем предполагалось по плану, бригада выполнила задание на один день раньше срока. Сколько дней потратила бригада на выполнение задания?

2) Две бригады должны были изготовить по 780 деталей. Первая бригада изготовляла в день на 9 деталей больше второй и выполнила задание на 6 дней раньше, чем вторая. Сколько дней затратила каждая бригада на выполнение задания?

3) На перегоне в 240 км поезд шел со скоростью, на 10 км/ч меньшей, чем предполагалось, и поэтому прибыл на место с опозданием на 20 мин. С какой скоростью должен был двигаться поезд на этом перегоне?

4) Велосипедист отправился из села в город, отстоящий от него на 30 км. Возвращаясь обратно по той же дороге, он уменьшил скорость на 2 км/ч и потому затратил на обратный путь на 30 мин больше. Сколько времени затратил велосипедист на путь из села в город?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

К главе I

1. Покажите, что при выполнении следующих заданий учащиеся, по существу находят множество истинности высказывательной формы:

а) Реши уравнение $x-9=18$.

б) Какие числа пропущены: $\square+79=79$, $100-\square=0$, $98:\square=98$, $67\cdot\square=0$, $\square:4=1$, $\square:2=7$?

в) Поставь числа, чтобы равенства были верными: $\square\cdot\square=28$, $\square\cdot\square=64$.

г) Рассмотри записи и заполни пропуски, сравнивая в каждом столбике второй пример с первым:

$36=9\cdot\square$ $\qquad$ $48=6\cdot\square$

$38=9\cdot\square+\square$ $\qquad$ $52=6\cdot\square+\square$

д) При умножении каких двух однозначных чисел может получиться 24? 12? 32? 49?

е) Составь примеры на деление с числами: 2, 64, 16, 32, 3, 48, 4. Образец: $64:2=32$.

2. Докажите или опровергните высказывания:

а) Существует равнобедренный треугольник, периметр которого равен 24 см, а боковая сторона равна 10 см.

б) Существует равнобедренный треугольник, периметр которого равен 24 см, а боковая сторона равна 5,5 см.

в) Существует прямоугольник, у которого диагональ равна 11 см, а одна из сторон 13 см.

г) Существует параллелограмм, диагонали которого равны 14 см и 20 см, а одна из сторон 18 см.

3. Установите значение истинности высказывания:

а) Для любых чисел a и b верно равенство $(a-b)^2=a^2-b^2$.

б) Существуют такие действительные числа a и b, что равенство $(a-b)^2=a^2-b^2$ истинно.

в) Для всех действительных чисел a и b имеет место равенство $(a+b)^{-2}=a^{-2}+b^{-2}$.

г) Для некоторых значений a и b равенство $(a+b)^{-2}=a^{-2}+b^{-2}$ не выполняется.

д) При некоторых значениях x верно равенство $\sqrt{(20+x)^2}=-x-20$.

е) Существуют такие значения y, при которых верно равенство $\sqrt{(1-y)^2}=y-1$.

4. Для ложных высказываний из упражнения 3 постройте отрицания.

5. Установите, какие из следующих высказываний истинны, и переформулируйте их, используя слово «следует»:

а) Каждое число, кратное 6, кратно 3.

б) Любое простое число есть число нечетное.

в) Все иррациональные числа действительные.

г) Всякий четырехугольник с прямыми углами является прямоугольником.

6. Про какие пары приведенных ниже утверждений можно сказать, что одно из них является необходимым (достаточным, необходимым и достаточным) для другого:

A — «$x>3$», B — «$x^2>9$», C — «$|x|>3$»?

7. Для каждого из предложений B и C установите, какое из них является необходимым условием для предложения A, а какое — достаточным:

а) A — «элемент x принадлежит пересечению множеств X и Y»,
B — «элемент x принадлежит множеству X»,
C — «элемент x принадлежит объединению множеств X и Y».

б) A — «элемент x принадлежит множеству X»,

B — «элемент x принадлежит пересечению множеств X и Y»,
C — «элемент x принадлежит объединению множеств X и Y».

в) A — «$n \vdots 18$», B — «$n \vdots 2$», C — «$n \vdots 9$».

г) A — «$n \vdots 6$», B — «$n \vdots 12$», C — «$n \vdots 3$».

д) A — «Четырехугольник $PQTS$ — ромб»,
B — «В четырехугольнике $PQTS$ все стороны равны»,
C — «Четырехугольник $PQTS$ — квадрат».

8. Вместо многоточия поставьте слово «необходимо», или «достаточно», или «необходимо и достаточно» так, чтобы полученные высказывания были истинными:

а) Для того чтобы $a=b$, ..., чтобы $|a|=|b|$.
б) Для того чтобы $a \vdots n$ и $b \vdots n$, ..., чтобы $(a+b) \vdots n$.
в) Для того чтобы $x \in A \cup B$, ..., чтобы $x \in A$.
г) Для того чтобы $x \in A \cap B$, ..., чтобы $x \in A$.
д) Для того чтобы дробь $\frac{x^2-9}{5x}$ была равна нулю, ..., чтобы $x=3$.

9. Для каждой из следующих теорем сформулируйте обратную, противоположную и обратную противоположной, установите их значение истинности:

а) Если число делится на 9, то и сумма цифр в его записи делится на 9.
б) Если число делится на 12, то оно делится на 3 и на 4.
в) Произведение двух любых натуральных чисел есть число натуральное.
г) Для того чтобы число делилось на 25, достаточно, чтобы его запись оканчивалась двумя нулями.
д) Во всяком прямоугольнике диагонали в точке пересечения делятся пополам.
е) Для того чтобы углы были смежными, необходимо, чтобы они в сумме составляли 180°.

10. Можно ли утверждать, что четырехугольник, в котором диагонали взаимно перпендикулярны и одна из них делит другую пополам, является ромбом?

11. Дан угол MAP, проведена его биссектриса. Через точку B, принадлежащую биссектрисе, проведена прямая, к ней перпендикулярная. Докажите, что она отсекла от угла равнобедренный треугольник. Выполните логический анализ этого доказательства.

12. Постройте окружность и проведите в ней диаметры AB и CD. Докажите, что хорды AD и BC равны между собой. Проведите логический анализ этого доказательства.

13. Докажите, что существуют такие значения a и b, при которых $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a}-\sqrt{b}$.

14. Какими должны быть рассуждения учащихся при выполнении задания:

а) Объясни, почему верны равенства: $28 \cdot 3 = 3 \cdot 28$, $36 \cdot 2 = 30 \cdot 2 + 6 \cdot 2$.
б) Рассмотри запись и объясни решение следующих примеров: $5 \cdot 14 = 14 \cdot 5 = 70$; $3 \cdot 26 = 26 \cdot 3 = 78$.

15. Покажите, что при выполнении следующих заданий учащиеся, по существу, устанавливают отношение принадлежности элемента множеству; укажите характеристическое свойство элементов этого множества:

а) Запиши число, при делении которого на 5 в остатке получится 2.
б) Подбери числа и составь 4 примера с данными ответами: $\square \cdot \square = 64$, $\square : \square = 26$.

16. Какое множество является пересечением:

а) множества натуральных чисел и множества действительных чисел;
б) множества действительных чисел и множества рациональных чисел?

17. Какое множество является дополнением:

а) множества натуральных чисел до множества целых чисел;
б) множества целых чисел до множества рациональных чисел;
в) множества рациональных чисел до множества действительных чисел?

18. Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между множествами A, B и C, если:

а) A — множество треугольников с углом 30°,
B — множество тупоугольных треугольников,
C — множество равнобедренных треугольников;
б) A — множество натуральных чисел, кратных 7,
B — множество натуральных чисел, кратных 35,
C — множество натуральных чисел, кратных 42

19. Установите отношения между множествами A и B ($A=B$, $A \subset B$, $B \subset A$), если:

а) A — множество двузначных чисел, B — множество двузначных чисел, кратных 3;
б) A — множество натуральных решений неравенства $2 \leqslant x \leqslant 5$, B — множество натуральных решений неравенства $1 < x < 6$;
в) A — множество натуральных чисел, кратных 4, B — множество натуральных чисел, кратных 12;
г) A — множество действительных решений неравенства $x > -6$, B — множество действительных решений неравенства $|x| < 3$;
д) A — множество пар действительных чисел, удовлетворяющих уравнению $x^2 = y^2$, B — множество пар действительных чисел, удовлетворяющих уравнению $x = y$;
е) A — множество пар действительных чисел, удовлетворяющих уравнению $x^3 = y^3$, B — множество пар действительных чисел, удовлетворяющих уравнению $x = y$.

20. С какими множествами и отношениями между ними, по существу, имеют дело учащиеся при решении задачи:

а) Из ряда чисел от 1 до 28 выпиши по порядку числа, которые делятся без остатка на 3.
б) Умножь каждое однозначное число на 7 и запиши значения полученных произведений.
в) Какие числа от 40 до 60 делятся без остатка на 7? на 8?
г) Каждое из чисел 56, 64, 72, 40 уменьши в 8 раз. Увеличь каждое из данных чисел на 8.
д) Запиши по порядку числа от 0 до 50, которые делятся без остатка на 3, на 4, на 7. Какие из них делятся без остатка на 6? на 12?
е) Из чисел 27, 45, 38, 62, 53, 72, 81, 48 выпиши те, которые при делении на 5 дают в остатке 4.

21. Какую логическую операцию выполняют учащиеся при решении задачи:

а) Найди среди данных примеров на деление с остатком решенные с ошибкой и реши их правильно:

37:4=8 (ост. 5) 48:7=6 (ост. 6)
82:9=9 (ост. 1) 58:6=8 (ост. 10)

б) Юннаты вскопали 18 грядок. Каждый день они копали по 9 грядок. Сколько дней юннаты копали эти грядки?

22. Решите комбинаторные задачи, используя правило произведения:

а) Из 6 открыток надо выбрать 3. Сколькими способами это можно сделать?
б) Из 10 кандидатов нужно выбрать 3 человека на конференцию. Сколькими различными способами это можно сделать?
в) Сколькими способами можно составить список из 6 человек?
г) Сколько различных пятизначных чисел можно записать, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5? Сколько среди них таких, которые начинаются цифрами 3 или 5?

23. Среди 100 учащихся-спортсменов лыжным и конькобежным спортом занимаются 9 человек, но никто из них не посещает секцию гимнастики; 6 человек занимаются лыжами и гимнастикой, но никто из них не катается на коньках; 19 че-

ловек занимаются только лыжами; 20 только коньками; 30 только гимнастикой; 5 человек занимаются только коньками и гимнастикой. Сколько человек занимаются лыжами, сколько коньками, сколько гимнастикой? Сколько человек занимаются всеми видами спорта?

24. В классе 28 учащихся: из них 4 отличника, 14 спортсменов, 18 участников художественной самодеятельности, 2 отличника и спортсмена, 10 — участники художественной самодеятельности, а 1 — спортсмен, отличник и участник художественной самодеятельности. Сколько учащихся не являются ни отличниками, ни спортсменами, ни участниками художественной самодеятельности?

25. В отчете сообщалось, что из 100 учащихся количество детей, изучающих разные языки, таково: все три языка — 5 человек, немецкий и испанский — 10, немецкий и французский — 20, французский и испанский — 8, испанский — 30, немецкий — 23, французский — 50. Отчет был оценен как неудовлетворительный. Почему?

26. 70 человек знают хотя бы один из трех языков, причем 10 человек знают только английский, 16 только немецкий, 18 только французский, а число знающих все три языка на 2 меньше числа знающих только французский и немецкий, на 4 меньше числа знающих только английский и французский и на 4 меньше числа знающих только английский и немецкий. Сколько человек знают все три языка?

27. На множестве целых чисел от 0 до 999 заданы отношения:

P — «иметь в записи одно и то же число цифр»,

Q — «иметь в записи одинаковые цифры»,

M — «оканчиваться при записи одной и той же цифрой»,

T — «быть больше на 10».

Какие из заданных отношений являются отношениями эквивалентности? Ответ обоснуйте. Для отношений эквивалентности укажите классы разбиения данного множества. Задайте на этом множестве чисел какое-либо отношение порядка.

28. Можно ли приведенные ниже отношения P, Q, T и M разбить на два класса — отношения эквивалентности и отношения порядка, если они заданы на множестве $X=\{35, 37, 42, 46, 15, 26, 5, 11, 17, 21\}$ и:

P — «оканчиваться при записи одной и той же цифрой»,

Q — «быть больше»,

T — «иметь один и тот же остаток при делении на 5»,

M — «иметь в записи одинаковые цифры»?

Ответ обоснуйте. Для отношений эквивалентности укажите классы разбиения множества X.

29. На сколько классов можно разбить отношения T, P, Q и M, если они заданы на множестве $X=\{24, 4, 12, 13, 15, 26, 72, 78, 81, 97, 39, 80\}$ и:

T — «быть больше в 6 раз»,

P — «иметь один и тот же остаток при делении на 6»,

Q — «оканчиваться при записи одной и той же цифрой»,

M — «иметь в записи одинаковые цифры»?

Для отношений эквивалентности укажите классы разбиения множества X.

30. Верно ли, что множество A равномощно множеству B, если:

а) A — множество натуральных чисел, кратных 9, B — множество натуральных чисел, кратных 18;

б) A — множество натуральных чисел, кратных 5, B — множество квадратов натуральных чисел?

31. Постройте граф и график соответствия f между множествами $X=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $Y=Z$, если:

а) $f: x \to 3x+1$; б) $f: x \to 5-x^2$; в) $f: x \to \frac{12}{x}$.

К главе II

1. Обоснуйте выбор действий при решении задачи:

а) В библиотеке на одной полке стояло 32 книги, а на другой 40 книг. 20 книг выдали детям. Сколько книг осталось на этих полках?

б) Во дворе играли 6 девочек и 5 мальчиков. Потом 2 мальчика ушли домой. Сколько ребят осталось во дворе?

в) Ребята сделали 10 красных фонариков и 6 желтых. Из них они собрали гирлянды, по 8 фонариков в каждой. Сколько получилось гирлянд?

г) В одном бидоне было 48 л молока, в другом — столько же. Продали 67 л. Сколько литров молока осталось?

д) Марина купила 5 тетрадей по 3 к. и книгу за 48 к. Сколько денег она уплатила?

е) Пионеры собрали для питомника 45 кг желудей. 18 кг желудей они упаковали в ящик, а остальные — поровну в 3 пакета. Сколько килограммов желудей было в каждом пакете?

2. Заполнив таблицу:

Слагаемое	3	5	7	9	11
Слагаемое	5	5	5	5	5
Сумма	8	10	12	14	16

учащийся сделал выводы:

а) Если первое слагаемое увеличить на 2, а второе оставить без изменения, то сумма увеличится на 2.

б) Сумма всегда меньше каждого из слагаемых.

Какой способ рассуждений использовал учащийся? Истинны ли полученные им выводы?

3. Заполнив таблицу:

Уменьшаемое	12	10	8	6	4
Вычитаемое	3	3	3	3	3
Разность	9	7	5	3	1

учащийся сделал выводы:

а) Если уменьшаемое уменьшить на 2, а вычитаемое оставить без изменения, то разность уменьшится на 2.

б) Разность всегда меньше уменьшаемого.

Какой способ рассуждений использовал учащийся? Истинны ли полученные им выводы?

4. Приведите рассуждения учащихся при выполнении задания:

«Объясни, почему верны следующие записи: $7+9=9+7$, $1+14=14+1$, $6+3+7=6+(3+7)$, $8+1+9=8+(1+9)$».

5. Напишите наибольшее и наименьшее десятизначные числа, в которых все цифры различны.

6. В записи $1*2*3*4*5$ замените звездочки знаками действий и расставьте скобки так, чтобы получилось выражение, значение которого 100.

7. Сколькими способами можно представить число 50 в виде суммы двух четных натуральных чисел? Выражения, отличающиеся порядком слагаемых, считайте совпадающими.

8. Сколько существует двузначных чисел, у которых цифра десятков больше цифры единиц?

9. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 100, цифры которых идут в возрастающем порядке?

10. Какой цифрой кончается:

а) сумма $26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 + 51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54$;

б) разность $41 \cdot 43 \cdot 45 \cdot 47 - 37 \cdot 39 \cdot 41 \cdot 42$;

в) произведение всех натуральных чисел от 7 до 81 включительно;
г) сумма всех трехзначных чисел?

11. Вычислите наиболее рациональным способом:

а) $109 \cdot 91 - 107 \cdot 93$;
б) $1002 \cdot 998 - 1003 \cdot 997$;
в) $5554 \cdot 5558 - 5552 \cdot 5556$;
г) $44\,443 \cdot 44\,448 \cdot 44\,447 - 44\,445 \cdot 44\,440 \cdot 44\,447$.

12. Какое свойство делимости используют учащиеся при решении задачи: «Суммой каких двух слагаемых удобно заменить каждое из чисел: 48, 72, 96, чтобы разделить его на 3? на 4?»

13. Докажите, что: а) число $9^5 - 3^8$ делится на 8; б) число $8^5 + 2^{11}$ делится на 17.

14. Каким числом (простым или составным) является значение выражения $1513^2 - 1512^2$?

15. Сколько различных делителей у числа $3^6 \cdot 5^4$?

16. Установите, какие величины, отношения между ними и действия рассматриваются в задаче, решите задачу:

а) На одной овощной базе было в 2 раза больше картофеля, чем на другой. После того как с первой базы вывезли 210 т, а на вторую привезли 80 т картофеля, на первой базе осталось на 100 т картофеля меньше, чем стало на второй. Сколько тонн картофеля стало на каждой овощной базе?

б) В двух баках содержалось 140 л воды. Когда из первого взяли 26 л воды, а из второго 60 л, то в первом баке осталось в 2 раза больше воды, чем во втором. Сколько литров воды было в каждом баке первоначально?

в) Расстояние между туристскими базами A и B 46 км. Группа туристов вышла с турбазы A в направлении турбазы B со скоростью 5 км/ч. Через 2 ч с турбазы B навстречу первой группе вышла со скоростью 4 км/ч другая группа туристов. Через сколько часов после своего выхода вторая группа встретится с первой?

К главе III

1. Найдите множество таких натуральных чисел x, при которых: а) $\frac{2x+1}{11}$ правильная дробь; б) $\frac{5x-1}{14}$ — неправильная дробь.

2. Найдите значение истинности высказывания:

а) $-\frac{6}{11} > -\frac{5}{9}$.

б) $0{,}15^3 > 0{,}15$.

в) При любых натуральных значениях переменной x дробь $\frac{24}{x}$ является записью натурального числа.

г) Существуют такие целые значения x, при которых дробь $\frac{18}{x}$ является записью целого числа.

д) Существуют такие две дроби, произведение которых равно их разности.

3. Даны числа 0,45 и $-\frac{5}{12}$. Найдите рациональное число, которое было бы больше одного из этих чисел и меньше другого.

4. Докажите, что существует такое рациональное число, которое заключено между числами $\frac{1}{60}$ и $\frac{3}{190}$.

5. Найдите наиболее рациональный способ сравнения значений выражений:

а) $-5-1\frac{1}{8}$ и $-5-1\frac{3}{8}$;

б) $\frac{14}{85} \cdot \frac{17}{101}$ и $\frac{13}{85} \cdot \frac{18}{101}$.

6. Представьте число в виде бесконечной десятичной дроби; объясните, почему эта дробь является периодической:

а) $-\frac{5}{6}$; б) $\frac{8}{33}$; в) $-\frac{18}{11}$.

7. Преобразуйте выражение и найдите его значение, подобрав для вычислений наиболее удобное из двух выражений (данного и полученного в результате преобразований):

1) $a^2 + ab$ при $a = 1{,}71$, $b = 1{,}29$;

2) $\frac{x^2+x+1}{x}$ при $x = 0{,}5$;

3) $\frac{3x^2 - xy}{9x^2 - y^2}$ при $x = -8$, $y = 25$.

8. Решите уравнение, используя зависимость между компонентами и результатом действия:

а) $\left(3\frac{1}{4} - \frac{\left(6\frac{9}{16} - 2\frac{1}{2}x\right) \cdot 0{,}53}{0{,}75}\right) : 6\frac{2}{3} = \frac{4}{15}$;

б) $12 - \left(30 - 19\frac{1}{2} : \left(2\frac{3}{4} - \frac{3}{5}x\right)\right) \cdot \frac{23}{55} = 3$;

в) $\left(2{,}37 - \left(5{,}1 + 35{,}1 - \frac{0{,}0016}{0{,}0075 + x}\right) \cdot 0{,}059\right) : 0{,}125 = 0{,}08$;

г) $66{,}6 : \left(5 + 3{,}2 : \frac{0{,}8 - 0{,}4x}{0{,}5}\right) - 7{,}15 = 0{,}25$.

9. Решите задачи алгебраическим способом:

а) Числитель первой дроби на 4 больше знаменателя. Если числитель этой дроби уменьшить на 4, а знаменатель умножить на 2, то получится дробь меньше первой на 1. Найдите первую дробь.

б) Знаменатель первой дроби меньше числителя на 2. Если числитель этой дроби уменьшить на 1, а знаменатель умножить на 2, то получится дробь меньше первой на 1. Найдите вторую дробь.

в) Жене и Тане купили туфли, шапочки и шарфы. Всего заплатили 75 р. Каждая вещь, купленная для Тани, стоит в 1,5 раза дороже, чем такая же вещь, купленная для Жени. Танины туфли в 10 раз дороже ее шапочки и в 3 раза дороже шапочки и шарфа Жени. Сколько стоит каждая купленная вещь?

10. Решите задачу арифметическим и алгебраическим способами:

а) В трех цехах 1800 рабочих. В первом цехе рабочих в 1,2 раза больше, чем во втором, а в третьем — на 100 человек больше, чем в первом. Сколько рабочих в каждом цехе?

б) Для подводной охоты купили ласты, маску и трубку. Ласты дороже маски на 2 р. и дороже трубки в 4 раза. Сколько стоит каждая вещь, если за всю покупку уплатили 8 р. 80 к.?

К главе IV

1. Найдите значение выражения:

а) $\frac{382 + 498 \cdot 381}{382 \cdot 498 - 116}$;

б) $8\sqrt{2\frac{3}{4} - \sqrt{44}} + 14\sqrt{\frac{11}{49}}$;

в) $\frac{\sqrt{21} - \sqrt{14}}{3\sqrt{7}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$;

г) $\sqrt{1300} - 4\sqrt{52} - 4\sqrt{3\frac{1}{4}}$.

2. Найдите пять таких последовательных целых чисел, чтобы сумма квадратов трех первых чисел равнялась сумме квадратов двух последних.

3. Найдите три таких последовательных четных числа, чтобы сумма квадратов первых двух равнялась квадрату третьего числа.

4. Докажите, что приведенные выражения тождественно равны. Какое из них удобнее для вычислений при указанных значениях переменных?

а) $x^2 \cdot y^2 - y^4$ и $(x+y)(x-y)y^2$ при $x=8$, $y=2$;

б) $(p^2+q^2)(p+q)(p-q)$ и p^4-q^4 при $p=\frac{3}{4}$, $q=\frac{1}{4}$;

в) $\frac{(a-b)^2}{2a}+b$ и $\frac{a}{2}+\frac{b^2}{2a}$ при $a=50$, $b=67$.

5. Решите уравнения и обоснуйте каждый шаг выполненных преобразований:

а) $\frac{3}{4x-1}-\frac{8}{5x+6}=0$; в) $\frac{8}{x-2}-\frac{7}{3x+1}=0$;

б) $\frac{6}{3x+1}-\frac{5}{2+3x}=0$; г) $\frac{12}{x^2-25}+\frac{x+1}{x-5}=1$.

6. Даны выражения:

а) $a+b$; в) $\sqrt{1-x^2}$; д) $\frac{-\sqrt{x}-\sqrt{y}}{-5}$;

б) $-a-b$; г) $\frac{-x-y}{-5}$; е) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Можно ли найти такие значения переменных, при которых указанные выражения принимают: 1) положительные значения; 2) отрицательные значения?

7. Верно ли высказывание: «Для любого $a \geqslant 0$ справедливо неравенство $\sqrt{a} < a$»?

8. Известно, что $a<b$ и $b>c$. Можно ли при этих условиях подобрать числа a, b, и c так, чтобы дополнительно выполнялось условие $a<c$?

9. Известно, что $a>b$ и $b \leqslant c$. Можно ли подобрать такие числа a, b и c, чтобы дополнительно выполнялось условие:

а) $a>c$; б) $a=c$?

10. Верно ли, что для всех действительных x справедливо неравенство:

а) $x+1>x$; б) $x^2>x$; в) $x+x>x$?

11. Существуют ли такие значения x, при которых неравенство $\frac{1}{x^2+1}<1$ будет ложным?

12. Докажите, что из неравенства:

а) $a<-2$ следует неравенство $-9a-10>8$;

б) $x>3$ следует неравенство $-11(x-2)<-11$;

в) $8-5x>-7$ следует неравенство $x<3$.

13. Докажите, что неравенства равносильны на множестве действительных чисел:

а) $3a-5<7$ и $-5a>-20$;

б) $(m+2)^2 \geqslant 0$ и $m^2 \geqslant -4(m+1)$.

14. Найдите множество решений неравенства и обоснуйте каждый шаг выполненных при этом преобразований:

а) $-3(x+1)-2(x-1)>-(2x+1)$;

б) $\frac{y+1}{3}-\frac{y+2}{6}<\frac{y+3}{2}$.

15. Совпадают ли области определения функций $f(x)$ и $g(x)$, если:

а) $f(x)=\sqrt{(x+3)(5+x)}$, $g(x)=\sqrt{\frac{x+3}{5+x}}$;

б) $f(x)=\sqrt{(x-2)(x^2+4)}$, $g(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x^2+4}}$?

16. Найдите область определения функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=\frac{5x}{x^2-5}$; в) $f(x)=\frac{\sqrt{x+4}}{x^2-1}$;

б) $f(x)=\sqrt{18-6x}$, г) $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{4-x}$.

17. Функция f — прямая пропорциональность. Найдите коэффициент пропорциональности и заполните таблицу:

x	-7		$-2{,}5$	26		0,5	
y		-2	7,5		126		12,51

18. Функция f — обратная пропорциональность. Определите коэффициент пропорциональности и заполните таблицу:

x	-3	-2	$-1{,}5$	2	4,5	
y			-6			9

19. Стороны прямоугольника 6 см и x см. Запишите формулу, выражающую зависимость площади (y см^2) этого прямоугольника от длины стороны. Задает ли она функцию? Постройте график этой зависимости при условии, что длина стороны не превышает 4 см.

20. За все купленные карандаши заплатили 12 к. Запишите формулу, выражающую зависимость количества карандашей (x шт.) от их цены (y к.). Покажите, что она задает функцию. Постройте график этой функции.

21. Цена одного карандаша 3 к. Запишите формулу, выражающую зависимость стоимости (y к.) от количества (x шт.) купленных карандашей, и покажите, что она задает функцию. Постройте ее график при условии, что $x \leqslant 6$.

22. Площадь прямоугольника 10 см^2. Запишите формулу, выражающую зависимость высоты (y см) этого прямоугольника от основания (x см). Задает ли она функцию? Постройте график этой зависимости при условии, что основание прямоугольника не превышает 10 см.

23. Установите, какая зависимость существует между величинами, данными в задаче, и решите ее двумя способами. Способы решения обоснуйте:

а) В трех одинаковых ящиках 21 кг апельсинов. Сколько килограммов апельсинов в 10 таких ящиках?

б) За 15 м ткани уплатили 45 р. Сколько метров такой же ткани можно купить на 24 р.?

в) У портнихи из каждых 10 м ситца получалось 3 рубашки. Сколько таких рубашек она может сшить из 50 м ситца?

г) В первый день магазин продал 8 одинаковых портфелей и получил за них 64 р. Во второй день было продано 6 таких портфелей. Сколько денег получили за портфели во второй день?

д) Два столяра отремонтировали стульев поровну. Первый столяр работал 6 дней, ремонтируя по 10 стульев в день, а второй работал 5 дней. Сколько стульев в день ремонтировал второй столяр?

24. Какие из нижеприведенных задач учащиеся начальных классов могут решить двумя способами:

а) 12 кг варенья разложили в 6 банок поровну. Сколько надо таких банок, чтобы разложить 24 кг варенья?

б) В двух одинаковых ящиках 32 кг яблок. Сколько килограммов яблок в 4 таких ящиках? в 5 ящиках?

в) На 4 простыни пошло 12 м полотна. Сколько таких простыней получится из 30 м полотна?

К главе V

1. Следует ли из равносоставленности двух прямоугольников: а) равенство этих прямоугольников; б) их равновеликость?

2. Существуют ли многоугольники, из равносоставленности которых следует их равенство?

3. Могут ли быть равновеликими: а) два неравных прямоугольника, имеющие по равной стороне; б) два неравных треугольника, которые имеют по две соответственно равные стороны?

4. Трапеция своими диагоналями разделена на четыре треугольника. Докажите, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики.

5. Как изменится площадь квадрата, если увеличить его диагональ в n раз?

6. Периметр прямоугольника равен 28 см, а разность смежных сторон равна 2 см. Определите длину диагонали и площадь прямоугольника.

7. Как построить квадрат, площадь которого в 2 раза больше площади данного квадрата?

8. Даны квадрат и произвольный прямоугольник, диагонали которого равны диагоналям квадрата. Площадь какой из этих фигур больше? Почему?

9. Как известно, площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Рассуждая по аналогии, учащийся предположил, что этим правилом можно воспользоваться и для вычисления площади трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, а также для вычисления площади произвольного четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями. Верно ли это предположение?

10. Будут ли равновеликими прямоугольники, если сторонами одного из них являются катеты прямоугольного треугольника, а сторонами другого — гипотенуза и опущенная на нее высота?

11. Установите, какие величины рассматриваются в задаче, в каких отношениях они находятся и какие выполняются над ними действия, решите задачу:

а) Сад и огород имеет форму прямоугольника, площадь каждого из них равна 1500 м^2. Ширина сада на 5 м больше ширины огорода, а длина сада на 10 м меньше длины огорода. Найдите размеры сада и огорода.

б) При постройке здания требовалось вынуть 4500 м^3 в определенный срок. Перевыполняя дневную норму на 45 м^3, строители уже за 4 дня до срока выполнили 96% задания. Определите сроки работы.

в) Отправляясь в путешествие, турист рассчитывал истратить в дороге 72 р. В течение первых 5 дней его расходы совпадали с расчетными, затем он стал расходовать в день в среднем на 1 р. больше, чем предполагал, и, задержавшись в пути на 1 день, вернулся домой, истратив на все путешествие на 23 р. больше, чем намечал. Сколько дней продолжалось путешествие?

г) Две машинистки получили для перепечатки рукопись. После 2 ч совместной работы одна из машинисток получила другое задание и вторая, оставшись одна, закончила работу через 1 ч 20 мин. За сколько часов могла бы перепечатать рукопись каждая машинистка, если второй на это понадобилось бы на 1 ч 10 мин больше, чем первой?

д) Мотоциклист предполагал проехать расстояние 90 км за определенное время. Проехав 54 км, он должен был остановиться у закрытого шлагбаума на 5 мин. Продолжая движение, он увеличил скорость на 6 км/ч и прибыл к месту назначения в намеченное время. Найдите первоначальную скорость мотоциклиста.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

Глава I. Общие понятия математики 4

§ 1. Математические понятия . . . . . —

1. Введение . . . . . —
2. Объем и содержание понятия 6
3. Определение понятий 8
4. Требования к определению понятий 11

§ 2. Математические предложения 15

5. Элементарные и составные предложения . . . . . —
6. Высказывания. Смысл слов «и», «или», «не» 17
7. Высказывательные формы 19
8. Смысл слов «все» и «некоторые» 20
9. Правила построения отрицаний высказываний, содержащих кванторы 24
10. Отношения следования и равносильности между предложениями 26
11. Необходимые и достаточные условия 27
12. Структура теоремы. Виды теорем 30

§ 3. Математические доказательства 32

13. Дедуктивные рассуждения . . . . . —
14. Простейшие схемы дедуктивных рассуждений 34
15. Неполная индукция 38
16. Способы доказательства истинности высказываний 40

§ 4. Текстовые задачи и их решение 43

17. Понятие текстовой задачи . . . . . —
18. Способы решения текстовых задач 46
19. Этапы решения задач арифметическими способами. Приемы анализа содержания задачи 49
20. Приемы поиска плана решения задачи и его выполнение . . . 53
21. Приемы проверки решения задачи 57
22. Решение задач алгебраическими способами 59

§ 5. Множества и операции над ними 61

23. Понятия множества и элемента множества . . . . . —
24. Способы задания множеств 63
25. Отношения между множествами 66
26. Множества и понятия 69
27. Пересечение множеств 71
28. Объединение множеств 73
29. Законы пересечения и объединения множеств 76
30. Дополнение подмножества 78

31. Понятие разбиения множества на классы 80
32. Некоторые задачи, связанные с операциями над конечными множествами 84
33 Декартово умножение множеств 88
34. Изображение декартова произведения двух числовых множеств на координатной плоскости 91
35. Некоторые задачи, связанные с декартовым умножением конечных множеств 95

§ 6 Отношения и соответствия 98
36. Понятие отношения . . . . . —
37. Способы задания отношений 101
38. Свойства отношений 103
39. Отношение эквивалентности 107
40. Отношение порядка 110
41. Понятие соответствия 111
42. Соответствие, обратное данному 116
43. Взаимно однозначные соответствия 119
44. Равномощные множества 121

Глава II. Целые неотрицательные числа 123

§ 7 Понятие числа . . . . . —
45. Об истории возникновения понятий натурального числа и нуля . . —
46. Порядковые и количественные натуральные числа. Счет 124
47. Теоретико-множественный смысл количественного натурального числа и нуля 126

§ 8. Понятие действий над целыми неотрицательными числами 128
48. Сложение . . . . . —
49. Законы сложения 130
50. Отношения «равно» и «меньше» 132
51. Вычитание 135
52. Отношения «больше на» и «меньше на» 138
53. Правила вычитания числа из суммы и суммы из числа 140
54. Умножение 142
55. Законы умножения 144
56. Деление 147
57. Отношения «больше в» и «меньше в» 150
58. Правила деления суммы на число и числа на произведение . . . 152
59. Деление с остатком 154
60. Свойства множества целых неотрицательных чисел 156

§ 9. Смысл натурального числа и действий над числами — результатами измерения величин 158
61. Сравнение отрезков. Действия над отрезками . . . . . —
62. Натуральное число как значение длины отрезка 159
63. Смысл сложения и вычитания чисел, являющихся значениями величин 161
64. Смысл умножения и деления чисел, являющихся значениями величин 163

§ 10. Запись целых неотрицательных чисел и алгоритмы действий над ними 166
65. Запись чисел в десятичной системе счисления . . . . . —
66. О возникновении и развитии способов записи целых неотрицательных чисел 169
67. О записи чисел в Древней Руси 174

68. Сложение многозначных чисел в десятичной системе счисления 176
69. Вычитание многозначных чисел в десятичной системе счисления 180
70. Умножение многозначных чисел в десятичной системе счисления 183
71. Деление многозначных чисел в десятичной системе счисления . . 187
72. Запись чисел в позиционных системах счисления, отличных от десятичной 192
73. Действия над числами в позиционных системах счисления, отличных от десятичной 196

§ 11. Делимость целых неотрицательных чисел 197
74. Понятие отношения делимости . . . . . —
75. Свойства отношения делимости 199
76. Делимость суммы, разности и произведения целых неотрицательных чисел 200
77. Признаки делимости чисел в десятичной системе счисления . . . 203
78. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное . . . 206
79. Признаки делимости на составные числа 208
80. Нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел способом разложения на простые множители . . 210
81. Алгоритм Евклида 213

Глава III. Расширение понятия числа 215

§ 12. Положительные рациональные числа 216
82. Понятие дроби . . . . . —
83. Понятие положительного рационального числа 219
84. Сложение и вычитание 221
85. Умножение и деление 224
86. Упорядоченность множества положительных рациональных чисел 227
87. Запись положительных рациональных чисел в виде десятичных дробей 230
88. Бесконечные десятичные периодические дроби 233

§ 13. Действительные числа 235
89. Понятие положительного иррационального числа . . . . . —
90. Действия над положительными действительными числами . . . 238
91. Отрицательные числа 240

Глава IV. Уравнения. Неравенства. Функции 242

§ 14. Числовые равенства и неравенства . . . . . —
92. Об алфавите математического языка . . . . . —
93. Числовые выражения и выражения с переменными 244
94. Числовые равенства и неравенства 247
95. Тождественные преобразования выражений 249

§ 15. Уравнения и неравенства 252
96. Уравнения с одной переменной . . . . . —
97. Равносильность уравнений 254
98. Неравенства с одной переменной. Равносильность неравенств . . 259

§ 16. Функции 262
99. Понятие функции 263
100. График функции 266

101. Линейная функция 269
102. Прямая пропорциональность 272
103. Обратная пропорциональность 274

Глава V. Величины и их измерения 277

§ 17. Понятие величины и ее измерения 278
104. Понятие величины . . . . . —
105. Понятие измерения величины 279
106. Из истории развития системы единиц величин 281
107. Международная система единиц 284

§ 18. Длина, площадь, масса, время 287
108. Длина отрезка и ее измерение . . . . . —
109. Площадь фигуры и ее измерение 291
110. Масса тела и ее измерение 297
111. Промежутки времени и их измерение 299
112. Зависимости между величинами 302

Дополнительные упражнения 307

Учебное издание

Стойлова Любовь Петровна
Пышкало Анатолий Михайлович

ОСНОВЫ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Зав. редакцией Ж. П. Данилова
Редактор Л. В. Антонова
Художник С. В. Рудько
Художественный редактор Т. Г. Никулина
Технические редакторы Н. Н. Бажанова, Л. П. Бирюкова
Корректоры О. Н. Дьячкина, Е. Г. Чапюк

ИБ № 11314

Сдано в набор 22.05.87. Подписано к печати 22.02.88. Формат 60×90$^1/_{16}$. Бумага кн.-журн. отечеств. Гарнит. литер. Печать высокая. Усл. печ. л. 20+0,25 форз. Усл. кр.-отт. 20,75. Уч.-изд. л. 21,16+0,42 форзац. Тираж 328 000 экз. Заказ № 147. Цена 85 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

ЦЕЛЫЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

$3 = n(A)$, где $A = \{\bigcirc, \bigcirc, \bigcirc\}$ или $A = \{\square, \square, \square\}$ или $A = \{\triangle, \triangle, \triangle\}$ и т. д.
$2 = n(B)$, где $B = \{\bigcirc, \bigcirc\}$ или $B = \{\square, \square\}$ или $B = \{\triangle, \triangle\}$ и т. д.
$0 = n(\varnothing)$, где $\varnothing$ — пустое множество

$2 < 3$, так как
а) в множестве, содержащем 3 элемента, можно выделить подмножество, в котором 2 элемента;
б) при счете 2 называют раньше, чем 3;
в) существует такое число 1, что $2 + 1 = 3$.

$3 + 2 = 5$, так как если $3 = n(A)$, $2 = n(B)$ и $A \cap B = \varnothing$, то в объединении множеств A и B будет 5 элементов.

$5 - 2 = 3$, так как
а) если $5 = n(A)$, $2 = n(B)$ и $B \subset A$, то в дополнении множества B до A будет 3 элемента;
б) $3 + 2 = 5$.

$3 \cdot 2 = 6$, так как
а) $3 \cdot 2 = 3 + 3$;
б) если $3 = n(A)$, $2 = n(B)$, то в декартовом произведении множеств A и B будет 6 элементов.

$6 : 3 = 2$, так как
а) если $6 = n(A)$ и A разбито на трехэлементные подмножества, то таких подмножеств будет 2;
б) если $6 = n(A)$ и A разбито на 3 равночисленных подмножества, то в каждом из них по 2 элемента;
в) $2 \cdot 3 = 6$.

85 к.